Pintando elefantes

Randall Romero Aguilar
randall.romero@ucr.ac.cr

Actualizado: 22 de octubre de 2023
Original: 29 de septiembre de 2019

Estos apuntes pretender ser una ayuda pedagógica para ayudarle a los estudiantes de EC-3201 Teoría Macroeconómica II, que ilustra las similitudes de los distintas aplicaciones de la teoría del consumidor, tal como se ilustran en los capítulos 7 y 8 del "libro" del curso.

Índice general

1 Problema genérico del consumidor

El problema es maximizar la utilidad de consumir x unidades de X y y unidades de Y, sujeto a una restricción presupuestaria lineal:

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{sujeto a } p_x x + p_y y = M$$

o alternativamente, cuando se tienen dotaciones iniciales $\bar{x}$, $\bar{y}$ de los bienes, sujeto a

$$p_x x + p_y y = p_x \bar{x} + p_y \bar{y}.$$

La restricción indica que el valor de la canasta de consumo x, y debe ser igual al valor de la dotación $\bar{x}$, $\bar{y}$, la cual en algunos ejemplos denominamos simplemente el "ingreso disponible" M.

Asumiendo que la solución no es de esquina, las dos condiciones de optimalidad son

1. que la tasa marginal de sustitución del consumo sea igual a la razón de precios o, lo que es lo mismo, que las utilidades marginales por unidad del numerario sean iguales para los dos bienes, y
2. que se cumpla la restricción presupuestaria.

Es decir:

$$\frac{U_x}{p_x} = \frac{U_y}{p_x} \qquad\qquad p_x x + p_y y = M$$

En resumen tenemos

Problema genérico del consumidor

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{sujeto a } p_x x + p_y y = M$$

Condición de primer orden

$$\frac{U_x}{p_x} = \frac{U_y}{p_x}$$

2 Aplicaciones

2.1 Modelo de oferta de trabajo

El problema es maximizar la utilidad de consumir c unidades del bien de consumo y disfrutar l horas de ocio, cuando se cuenta con una dotación π del bien de consumo y h de tiempo, el cual debe emplearse en trabajar y en disfrutar ocio:

$$\max_{c,l} U(\underset{x}{c}, \underset{y}{l}) \quad \text{sujeto a } c = w(h - l) + \pi$$

La restricción puede escribirse de manera estándar como

$$\underset{p_x}{1}\, c + \underset{p_y}{w} l = \underset{p_x}{1}\, \pi + \underset{p_y}{w} h$$

La restricción indica que el valor de la canasta de consumo c, l debe ser igual al valor de la dotación π, h. En ausencia de un mercado laboral, el consumidor simplemente consumiría su dotación.

Condiciones de optimalidad (asumiendo que la solución no es de esquina) son:

$$\begin{cases} \dfrac{U_c}{1} = \dfrac{U_l}{w} \\ c + wl = \pi + wh \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_l = wU_c \\ c = \pi + w(h - l) \end{cases}$$

Modelo de oferta de trabajo

$$\max_{c,l} U(c, l) \quad \text{sujeto a } c = w(h - l) + \pi$$

Pintando el elefante

$$\max_{c,l} U(c, l) \quad \text{sujeto a } c + wl = wh + \pi$$

Condición de primer orden

$$\frac{U_c}{1} = \frac{U_l}{w} \quad \Rightarrow \quad u_l = wU_c$$

2.2 Modelo de elección con incertidumbre

Un consumidor enfrenta una situación incierta: si todo sale bien (en el estado de la naturaleza g, *good* o bueno) puede consumir su dotación $c_g = W$ (*wealth* o riqueza), medida en unidades del bien de consumo; pero si ocurre un siniestro (en el estado de la naturaleza b, *bad* o malo) entonces sufrirá una pérdida de L (*loss*) unidades de su dotación, y por tanto solo podría consumir $c_b = W - L$ unidades. La probabilidad de que ocurra el siniestro es π, por lo que $1-\pi$ es entonces la probabilidad de que todo esté bien.

En ausencia de un mercado de seguros, el consumidor simplemente se ve obligado a consumir su dotación: W unidades en el estado g, $W-L$ en el estado b. Ahora bien, si hay un seguro que permite asegurar K unidades del bien contra el siniestro del estado b, a cambio de una prima γ por unidad asegurada, entonces el consumidor podría consumir:

$$\begin{aligned} c_g &= W - \gamma K && \text{(en el estado bueno)} \\ c_b &= W - L - \gamma K + K && \text{(en el estado malo.)} \end{aligned}$$

El problema del consumidor es escoger la cantidad de seguro K que maximice la utilidad *esperada* de su consumo:

$$\begin{aligned} \max_{c_g, c_b} U\left(\underbrace{c_g}_{x},\, \underbrace{c_b}_{y}|\pi\right) &= \max_{c_g, c_b} \{(1-\pi)u(c_g) + \pi u(c_b)\} \\ &= \max_{K} \{(1-\pi)u(W-\gamma K) + \pi u(W - L - \gamma K + K)\}\,. \end{aligned}$$

Esta última expresión puede resolverse simplemente respecto a K. No obstante, observe que también puede resolverse en términos del "elefante" original si obtenemos la restricción presupuestaria:

$$\begin{cases} c_g = W - \gamma K \\ c_b = W - L + (1-\gamma)K \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{W - c_g}{\gamma} = \frac{c_b - W + L}{1-\gamma} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(1-\gamma)}_{p_x} c_g + \underbrace{\gamma}_{p_y} c_b = W - \gamma L$$

El problema es entonces

$$\max_{c_g, c_b} (1-\pi)u(c_g) + \pi u(c_b) \quad \text{sujeto a } (1-\gamma)c_g + \gamma c_b = W - \gamma L$$

Modelo de elección con incertidumbre

$$\max_{c_g, c_b} (1-\pi)u(c_g) + \pi u(c_b) \quad \text{sujeto a } \begin{cases} c_g = y_g - \gamma K \\ c_b = y_b - \gamma K + K \end{cases}$$

Pintando el elefante

$$\max_{c_g, c_b} (1-\pi)u(c_g) + \pi u(c_b) \quad \text{sujeto a } (1-\gamma)c_g + \gamma c_b = W - \gamma L$$

Condición de primer orden

$$\frac{(1-\pi)u'(c_g)}{1-\gamma} = \frac{\pi u'(c_b)}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma(1-\pi)u'(c_g) = (1-\gamma)\pi u'(c_b)$$

2.3 Modelo de elección intertemporal

El problema es maximizar la utilidad de consumir c_0 unidades del bien de consumo en el período presente y disfrutar c_1 unidades del bien de consumo en el período futuro, cuando el consumidor descuenta la utilidad del período futuro con el factor de descuento β

$$U\left(c_0, c_1\right) = u(c_0) + \beta u(c_1).$$

El consumidor cuenta con una dotación y_0 en el período 0 y de y_1 en el período 1. En ausencia de un mercado de ahorro y crédito, el consumidor simplemente consume su dotación. Si hay un mercado de ahorro y crédito que permite ahorrar (o pedir prestado) S unidades del bien en el período 0 a una tasa de interés R, entonces el consumo sería:

$$\begin{cases} c_0 = y_0 - S \\ c_1 = y_1 + RS \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S = y_0 - c_0 = \frac{c_1 - y_1}{R} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{1}_{p_x} c_0 + \underbrace{\frac{1}{R}}_{p_y} c_1 = \underbrace{1}_{p_x} y_0 + \underbrace{\frac{1}{R}}_{p_y} y_1$$

El problema es entonces

$$\max_{c_g, c_b} u(c_0) + \beta u(c_1) \quad \text{sujeto a } c_0 + \frac{c_1}{R} = y_0 + \frac{y_1}{R}$$

Condiciones de optimalidad (asumiendo que la solución no es de esquina) son:

$$\begin{cases} \dfrac{u'(c_0)}{1} = \dfrac{\beta u'(c_1)}{1/R} \\ c_0 + \dfrac{c_1}{R} = y_0 + \dfrac{y_1}{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u'(c_0) = \beta R u'(c_1) \\ \quad c_1 = y_1 + R(y_0 - c_0) \end{cases}$$

Modelo de elección intertemporal

$$\max_{c_g, c_b} u(c_0) + \beta u(c_1) \quad \text{sujeto a } \begin{cases} c_0 = y_0 - S \\ c_1 = y_1 + RS \end{cases}$$

Pintando el elefante

$$\max_{c_g, c_b} u(c_0) + \beta u(c_1) \quad \text{sujeto a } c_0 + \frac{c_1}{R} = y_0 + \frac{y_1}{R}$$

Condición de primer orden

$$\frac{u'(c_0)}{1} = \frac{\beta u'(c_1)}{1/R} \quad \Rightarrow \quad u'(c_0) = \beta R u'(c_1)$$

2.4 Modelo de programación dinámica

El problema es maximizar la utilidad de consumir c_t unidades del bien de consumo en el período t, para un consumidor con horizonte infinito, cuando el consumidor descuenta la utilidad del consumo con el factor de descuento β

$$U\left(c_0, \ldots, c_\infty\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

El consumidor cuenta con una riqueza inicial A_0 en el período 0. En cualquier período t de su vida, el consumidor inicia con A_t unidades, consume c_t, y el resto lo invierte en un bono a una tasa de interés R, con lo que en el siguiente período su activo será A_{t+1} unidades:
Utilizando programación dinámica (tema 10 del curso), la función objetivo del consumidor puede escribirse como la ecuación de Bellman:

$$U(c_0, A_1) = V(A_0) = \max_{c_1, A_1} \left[u(c_0) + \beta V(A_1)\right]$$

Mientras que la restricción $A_{t+1} = R(A_t - c_t)$ puede reescribirse en el primer período como:

$$\underset{p_x}{1}\, c_0 + \underset{p_y}{\frac{1}{R}} A_1 = A_0$$

Nótese que, a pesar de la complicación adicional de introducir en la función objetivo a la función valor V, este modelo es en esencia similar al de consumo intertemporal con dos períodos. Por tanto, las condiciones de optimalidad (asumiendo que la solución no es de esquina) son:

$$\begin{cases} \dfrac{u'(c_0)}{1} = \dfrac{\beta V'(A_1)}{1/R} \\ c_0 + \dfrac{A_1}{R} = A_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} u'(c_0) = \beta R V'(A_1) \\ \quad A_1 = R(A_0 - c_0) \end{cases}$$

Modelo de programación dinámica

$$U\left(c_0, \ldots, c_\infty\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{sujeto a } A_{t+1} = R(A_t - c_t)\ \forall t = 0, 1, \ldots$$

Pintando el elefante

$$V(A_0) = \max_{c_1, A_1} \left[u(c_0) + \beta V(A_1)\right] \quad \text{sujeto a } c_0 + \frac{A_1}{R} = A_0$$

Condición de primer orden

$$\frac{u'(c_0)}{1} = \frac{\beta V'(A_1)}{1/R} \quad \Rightarrow \quad u'(c_0) = \beta R V'(A_1)$$

En este modelo en particular, sabiendo que la condición de la envolvente es $V'(A) = u'(c)$, puede obtenerse el siguiente resultado:

Ecuación de Euler

$$u'(c_0) = \beta R c'(c_1)$$

3 Resumen

A manera de resumen, vemos que en todos los ejemplos hemos podido ”pintar” el problema como uno de escoger entre dos cantidades de ”bienes” sujetos a una combinación lineal:

Cuadro 1: Resumen de los ”elefantes”, perdón, modelos

Problema	Bien 1	Bien 2	Objetivo	Restricción	Condicion de optimalidad
Original	x	y	$U(x,y)$	$p_x x + p_y y = M$	$\frac{U_x}{p_x} = \frac{U_y}{p_y}$
Laboral	c	l	$U(c,l)$	$c + wl = wh + \pi$	$\frac{U_c}{1} = \frac{U_l}{w}$
Seguro	c_g	c_b	$(1-\pi)u(c_g) + \pi u(c_b)$	$(1-\gamma)c_g + \gamma c_b = W - \gamma L$	$\frac{(1-\pi)u'(c_g)}{1-\gamma} = \frac{\pi u'(c_b)}{\gamma}$
Intertemporal	c_0	c_1	$u(c_0) + \beta u(c_1)$	$c_0 + \frac{c_1}{R} = y_0 + \frac{y_1}{R}$	$\frac{u'(c_0)}{1} = \frac{\beta u'(c_1)}{1/R}$
Bellman	c_0	A_1	$u(c_0) + \beta V(A_1)$	$c_0 + \frac{A_1}{R} = A_0$	$\frac{u'(c_0)}{1} = \frac{\beta V'(A_1)}{1/R}$