These problems were prepared for the course

EC3201 - Teoría Macroeconómica 2

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

II Semester 2018

These problem sets were last updated August 12, 2018. A more recent version might be available at
http://randall-romero.com/teaching/

CHAPTER I:

Macroeconomic Modeling: From Keynes and the Classics to DSGE

1 Selección múltiple

1. En los 1970s, Lucas y Sargent afirmaron que
    - A. los modelos macroeconómicos existentes no podían usarse para el diseño de política.
    - B. con expectativas racionales, solo cambios sorpresivos en la oferta monetaria podía afectar al producto.
    - C. la herramienta adecuada para el diseño de polítca es la teoría de juegos, en vez del control óptimo.
    - D. todas las anteriores
    - E. ninguna de las anteriores.
2. En el modelo IS-LM, ¿cuál de las siguientes variables se asume que es exógena?
    - A. el gasto del gobierno G
    - B. el consumo C
    - C. el ingreso agregado Y
    - D. la inversión I
    - E. la tasa de interés r
3. Según Keynes,
    - A. la Gran Depresión fue causada por políticas fiscales expansivas fallidas.
    - B. balancear el presupuesto fiscal en medio de una depresión sería un error grave.
    - C. la inflación siempre es un fenómeno monetario.
    - D. la curva de Phillips es estable.
    - E. ninguna de las anteriores.
4. La Síntesis Neoclásica...
    - A. fue el término utilizado por Keynes para referirse a sus nuevas teorías.
    - B. rechazó virtualmente todas las ideas de Keynes.
    - C. afirmó que los modelos econométricos de la economía no podían ser utilizados para predecir el futuro.
    - D. afirmó que la economía siempre opera en (o muy cerca de) la tasa natural de desempleo.
    - E. fue la escuela de pensamiento dominante entre los economistas en los 1950s y 1960s.
5. La curva de Phillips describe la relación que existe entre
    - A. el tipo de cambio y la inflación.
    - B. el PIB y el nivel de empleo.
    - C. la oferta monetaria y la tasa de interés.
    - D. la inflación y el desempleo.
    - E. Ninguna de las anteriores.

2 Falso o verdadero

6. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es falsa o verdadera. Para las que sean falsas, **explique brevemente** por qué son falsas.
   (a) La evidencia empírica (datos de Estados Unidos) muestra que desde los 1960s la relación negativa entre inflación y desempleo (la curva de Philips) ha sido estable.
   (b) Con la estimación de una regresión lineal es posible determinar si el PIB depende del *nivel* o de *cambios sorpresivos* de la oferta monetaria.
   (c) Los modelos de los nuevos keynesianos se distinguen de los modelos RBC (ciclo económico real) en que rechazan el supuesto de expectativas racionales.
   (d) Datos del Banco Central de Costa Rica muestran que en nuestro país usualmente los agentes anticipan una inflación mayor a la que efectivamente sucede.

3 La crítica de Lucas

7. A inicios de los 1970s, era común que en los trabajos de macroeconomía aplicada se estimara un modelo econométrico, y luego se usara el modelo estimado para predecir qué pasaría si cambiara la política economómica. En este contexto,
   (a) ¿En qué consiste la crítica de Lucas?
   (b) En respuesta a la crítica de Lucas, ¿qué incorporan los modelos macroeconómicos modernos para evitar el problema señalado por Lucas?

CHAPTER II:

Business Cycle Measurement

1 El filtro de Hodrick-Prescott

1. El filtro de Hodrick-Prescott puede obtenerse a partir del siguiente problema de minimización:

$$s_i^{HP} = \underset{s_1,\ldots,s_T}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t=1}^{T} (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} (s_{t+1} - 2s_t + s_{t-1})^2 \right\}$$

$$= \underset{S}{\operatorname{argmin}} \left\{ (Y-S)'(Y-S) + \lambda (AS)'(AS) \right\}$$

   donde Y es un vector con las T observaciones de y_t, A es una matriz de tamaño $(T-2)\times T$, S representa la tendencia de la serie, y $\lambda \geq 0$ es un escalar.

   (a) Obtenga la solución para la tendencia de la serie.

   (b) ¿Qué pasa con S conforme $\lambda \to \infty$?

2. Explique la principal advertencia que hace Canova (1998) en su artículo “Detrending and business cycle facts” acerca del uso exclusivo del filtro Hodrick-Prescott (1600) en el estudio de ciclos económicos.

2 El ciclo económico en Costa Rica

Para responder esta pregunta, necesitará obtener datos de la sección de ”Indicadores Económicos” del sitio web del Banco Central de Costa Rica: `http://www.bccr.fi.cr`

3. ¿Cuáles son las principales características del cicle económico en Costa Rica?

   (a) Descargue datos trimestrales acerca del crecimiento de los componentes del PIB desde 1991, disponibles en el cuadro `Producto Interno Bruto Trimestral y Gasto a precios constantes: Tendencia ciclo: tasa de variación interanual`.

   (b) Cambie los nombres de las series como se indica. Borre las demás.

   Y PRODUCTO INTERNO BRUTO
   C Gasto de consumo final de los hogares
   G Gasto de consumo final del Gobierno General
   I Formación bruta de capital fijo
   X Exportaciones de bienes y servicios
   M Importaciones de bienes y servicios

   (c) ¿Cuáles componentes del PIB han crecido más aceleradamente? (calcule el promedio simple)

Y	4.73
C	
G	
I	
X	
M	

   (d) ¿Cuáles componentes son más volátiles? (Calcule la desviación estándar de cada serie; normalice dividiendo por la desviación estándar del PIB)

Y	1.00
C	
G	
I	
X	
M	2.87

(e) ¿Cuáles componentes son pro-cíclicos? ¿Contra-cíclicos? Los componentes procíclicos son los que están correlacionados positivamente con el PIB, mientras que los contra-cíclicos están negativamente correlacionados con PIB. (calcule la matriz de correlaciones)

	Y	C	G	I	X	M
Y	1					
C		1				
G			1	0.11		
I				1		
X		0.26			1	
M						1

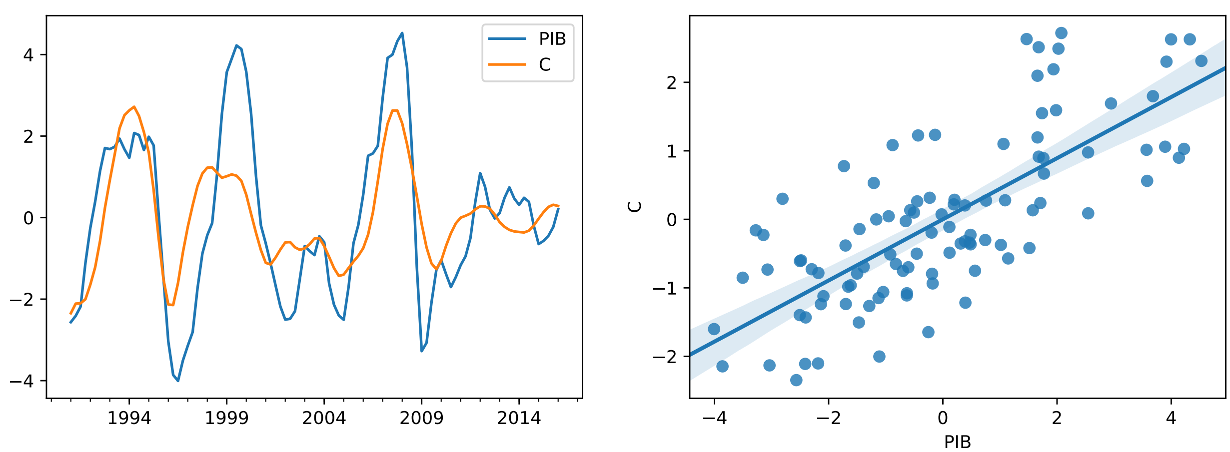
(f) En la última sección de Lecture 4: *Expectations, Consumption and Investment* se nos presentó evidencia de que en EE.UU. la inversión es más volátil que el consumo privado. ¿Es esto cierto en Costa Rica también?

- Replique la figura en la página 19 de la presentación (Rates of Change of Consumption...since 1960) con datoss de Costa Rica.
- Compare la volatilidad relativa de C y de I, (obtenidas previamente en la parte (d)).

3 Hechos estilizados del ciclo en Costa Rica

4. En la figura 1 se dibujan las desviaciones porcentuales de la tendencia en el PIB y en el gasto de consumo (C), como series temporales en la izquierda y como nube de puntos a la derecha.

Figure 1: Ciclos del PIB y del consumo



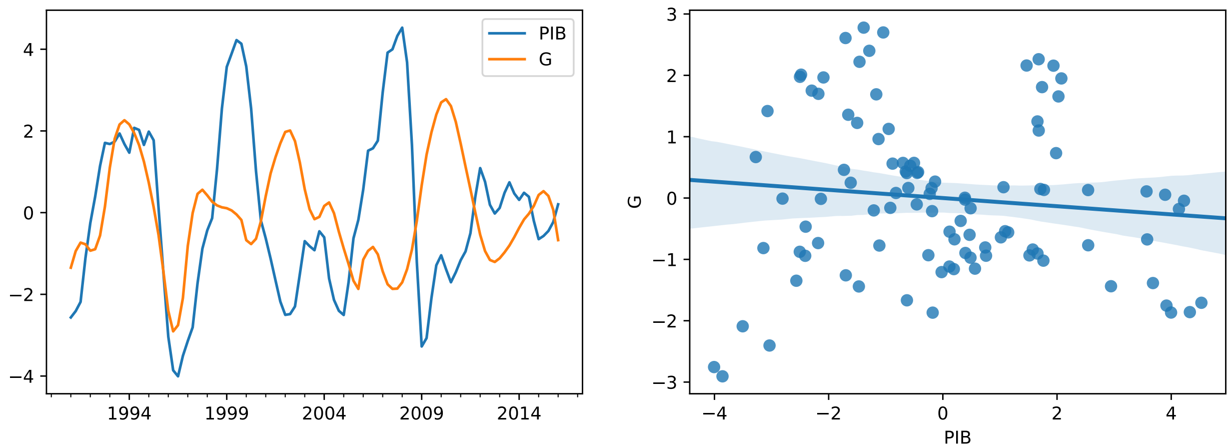
(a) ¿Cuál es más variable, PIB o C?

(b) ¿C es procíclico, anticíclico o acíclico? ¿Cómo lo sabe? ¿Qué cree que lo explica?

(c) ¿Hay alguna tendencia de C a liderar o explicar con rezago al PIB, o resulta una variable coincidente?

5. En la figura 2 se dibujan las desviaciones porcentuales de la tendencia en el PIB y en el gasto público (G), como series temporales en la izquierda y como nube de puntos a la derecha.

Figure 2: Ciclos del PIB y del gasto público



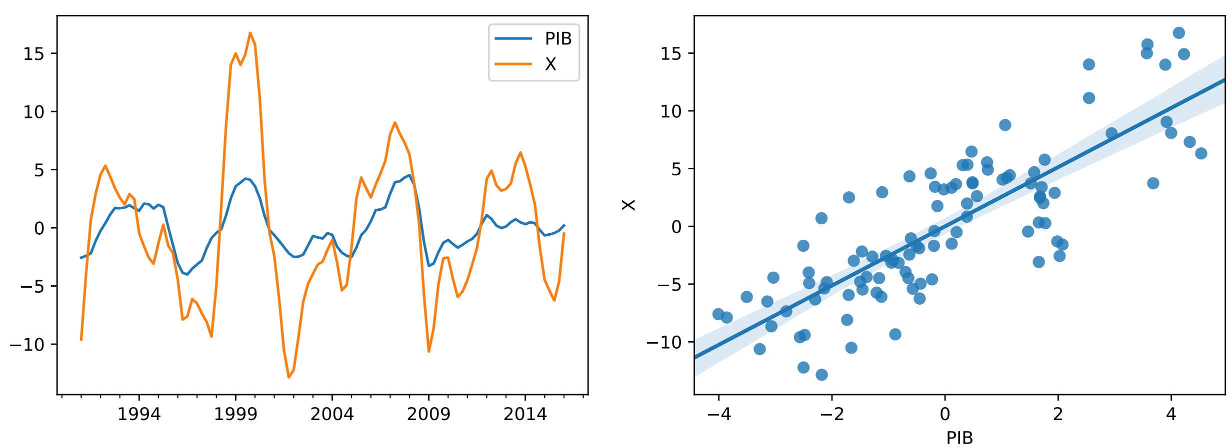
(a) ¿Cuál es más variable, PIB o G?

(b) ¿G es procíclico, anticíclico o acíclico? ¿Cómo lo sabe? ¿Qué cree que lo explica?

(c) ¿Hay alguna tendencia de G a liderar o explicar con rezago al PIB, o resulta una variable coincidente?

6. En la figura 3 se dibujan las desviaciones porcentuales de la tendencia en el PIB y en las exportaciones de bienes y servicios (C), como series temporales en la izquierda y como nube de puntos a la derecha.

Figure 3: Ciclos del PIB y de las exportaciones



(a) ¿Cuál es más variable, PIB o X?

(b) ¿X es procíclico, anticíclico o acíclico? ¿Cómo lo sabe? ¿Qué cree que lo explica?

(c) ¿Hay alguna tendencia de X a liderar o explicar con rezago al PIB, o resulta una variable coincidente?

CHAPTER III:

Expectations: The Basic Tools

Resuelva los siguiente problemas, tomados del libro de texto de Blanchard, Amighini y Giavazzi 2012.

1. Indique si son verdaderas, falsas o inciertas cada una de las siguientes afirmaciones utilizando la información de este capítulo. Explique brevemente su respuesta:
   (a) Mientras la inflación permanezca más o menos constante, las variaciones del tipo de interés real serán más o menos iguales a las variaciones del tipo de interés nominal.
   (b) Si la inflación resulta ser más alta de lo esperado, el coste real efectivo de los créditos resulta ser menor que el tipo de interés real.
   (c) Observando los distintos países, el tipo de interés real tiende a variar mucho menos que el tipo de interés nominal.
   (d) El tipo de interés real es igual al tipo de interés nominal dividido por el nivel de precios.
   (e) El valor que tiene hoy un pago nominal que se realizará en el futuro no puede ser mayor que el propio pago nominal.
   (f) El valor real que tiene hoy un pago real que se realizará en el futuro no puede ser mayor que el propio pago real.

2. Calcule el tipo de interés real en cada uno de los casos siguientes utilizando la fórmula exacta y la fórmula aproximada:
   (a) $i = 4\%; \quad \pi^e = 2\%.$
   (b) $i = 15\%; \quad \pi^e = 11\%.$
   (c) $i = 54\%; \quad \pi^e = 46\%.$

3. Usted quiere ahorrar 2.000 euros hoy para cuando se jubile dentro de cuarenta años. Tiene que elegir entre dos planes:

   - No pagar impuestos hoy, colocar el dinero en una cuenta que rinda intereses y pagar unos impuestos iguales a un 25% de la cantidad total que retire cuando se jubile.
   - Pagar unos impuestos equivalentes a un 20% de la cantidad invertida hoy, colocar el resto en una cuenta que rinda intereses y no pagar ningún impuesto cuando retire sus fondos al jubilarse.

   (a) ¿Cuál es el valor actual descontado esperado de cada una de estas opciones si el tipo de interés es del 1%? ¿Y si es del 10%?
   (b) ¿Qué opción elegiría en cada caso?

CHAPTER IV:

Expectations: Financial Markets and Expectations

Resuelva los siguiente problemas, tomados del libro de texto de Blanchard, Amighini y Giavazzi 2012.

1 Selección múltiple

1. Indique si son verdaderas, falsas o inciertas cada una de las siguientes afirmaciones utilizando la información de este capítulo. Explique brevemente su respuesta:
   (a) Los bonos basura son bonos que nadie quiere tener.
   (b) El precio de un bono a un año baja cuando el tipo de interés nominal a un año sube.
   (c) Dada la hipótesis de Fisher, una curva de tipos de pendiente positiva puede indicar que los mercados financieros temen que aumente la inflación en el futuro.
   (d) Los tipos de interés a largo plazo normalmente varían más que los tipos de interés a corto plazo.
   (e) Un aumento idéntico de la inflación esperada y de los tipos de interés nominales a todos los plazos no debería influir en el mercado de valores.
   (f) Una expansión monetaria da lugar a una curva de tipos de pendiente positiva.
   (g) Un inversor racional nunca debe pagar un precio positivo por unas acciones que nunca repartirán dividendos.

2. Averigüe el rendimiento a plazo de cada uno de los bonos siguientes:
   (a) Un bono de cupón cero que tiene un valor nominal de \$1.000, un plazo de tres años y un precio de \$800.
   (b) Un bono de cupón cero que tiene un valor nominal de \$1.000, un plazo de cuatro años y un precio de\$800.
   (c) Un bono de cupón cero que tiene un valor nominal de \$1.000, un plazo de cuatro años y un precio de \$850.

3. Suponga que el tipo de interés anual es del 5% y que los mercados financieros esperan que suba a un 5,5% el próximo año, a un 6% dentro de dos años y a un 6,5% dentro de tres. Averigüe el rendimiento a plazo de:
   (a) Un bono a un año.
   (b) Un bono a dos años.
   (c) Un bono a tres años.

4. Utilice el modelo IS-LM para averiguar cómo afecta a los precios de las acciones cada uno de los acontecimientos descritos en a) a c). Si el efecto es ambiguo, indique qué información adicional necesitaría para extraer una conclusión:
   (a) Una política monetaria expansiva inesperada sin que varíe la política fiscal.
   (b) Una política monetaria expansiva totalmente esperada sin que varíe la política fiscal.
   (c) Una política monetaria expansiva totalmente esperada con una política fiscal expansiva imprevista.

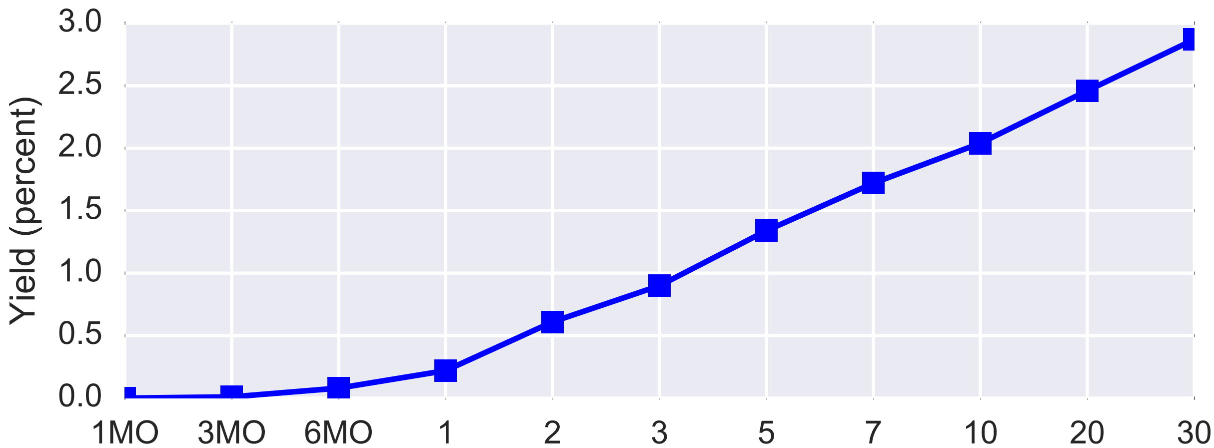
5. Los precios de las acciones y la prima de riesgo
   (a) Suponga que se espera que las acciones de una empresa repartan un dividendo de 1.000 euros dentro de un año y que el valor real de los dividendos aumente un 3% al año indefinidamente a partir de entonces. ¿Cuál es el precio actual de las acciones si el tipo de interés real permanece constante en 5%; 8%?

   Ahora suponga que la gente exige una prima de riesgo para tener acciones.
   (b) Repita la parte (a) suponiendo que la prima de riesgo exigida es del 8%.
   (c) Repita la parte (a) suponiendo que la prima de riesgo exigida es del 4%.
   (d) ¿Qué espera que ocurra con los precios de las acciones si la prima de riesgo disminuye inesperadamente? Explique su respuesta verbalmente.

2 Curva de rendimiento

6. Considere el gráfico en la figura 4, que presenta la curva de rendimiento en Estados Unidos al 15 de octubre del 2015.

Figure 4: The yield curve as of October 15, 2015



(a) ¿Cómo se interpreta que la curva tenga pendiente positiva entre los plazos de 1 y 30 años?

(b) ¿Cómo se interpreta que la curva sea horizontal entre los plazos de 1 a 6 meses?

(c) Suponga que los rendimientos en la figura 4 son de 0.2% a un año plazo y de 0.6% a dos años plazo. Según esto, ¿cuál es la tasa de interés a un año plazo que los mercados financieros anticipan que estaría vigente al 15 de octubre **de 2016**?

CHAPTER V:

Expectations: Consumption and Investment

Resuelva los siguiente problemas, tomados del libro de texto de Blanchard, Amighini y Giavazzi 2012.

1. Un consumidor tiene una riqueza no humana de 100.000 euros. Gana 40.000 este año y espera que su sueldo suba un 5% en términos reales durante los dos próximos años, momento en que se jubilará. El tipo de interés real es de un 0% y se espera que siga siéndolo en el futuro. La renta laboral está sujeta a un tipo impositivo del 25%:
   (a) ¿Cuál es la riqueza humana de este consumidor?
   (b) ¿Y su riqueza total?
   (c) Si este consumidor espera vivir otros siete años después de jubilarse y quiere que su consumo permanezca constante (en términos reales) todos los años a partir de ahora, ¿cuánto puede consumir este año?
   (d) Si este consumidor recibiera un plus de 20.000 euros este año solamente y todos sus sueldos futuros siguieran siendo iguales que antes, ¿cuánto podría aumentar su consumo actual y su consumo futuro?
   (e) Suponga ahora que cuando se jubila, la seguridad social comienza a pagarle cada año unas prestaciones iguales a un 60% de los ingresos obtenidos por el consumidor durante el último año en que trabajó. Suponga que las prestaciones están exentas de impuestos. ¿Cuánto puede consumir este año y mantener, aun así, constante el consumo a lo largo de toda su vida?

2. Un fabricante de patatas fritas está considerando la posibilidad de comprar otra máquina para fabricarlas que cuesta 100.000 euros. Esta se depreciará un 8% al año. Generará unos beneficios reales de 18.000 euros el año que viene, 18,000(1 - 8%) euros dentro de dos (es decir, los mismos beneficios reales, pero ajustados para tener en cuenta la depreciación), $18{,}000(1 - 8\%)^2$ dentro de tres años, etc. Averigüe si el fabricante debe comprar la máquina si se supone que el tipo de interés real se mantiene constante en:
   (a) 5%
   (b) 10%
   (c) 15%

3. Suponga que acaba de terminar los estudios universitarios a los veintidós años y que le han ofrecido un sueldo de partida de 40.000 euros, que se mantendrá constante en términos reales. Sin embargo, también le han admitido en un programa de tercer ciclo. El curso que puede realizar en dos años, tras los cuales espera que su salario de partida sea un 10% más alto en términos reales y que permanezca constante en términos reales a partir de entonces. El tipo del impuesto sobre la renta del trabajo es del 40%.
   (a) Si el tipo de interés real es cero y espera jubilarse a los sesenta años (es decir, si no realiza el curso, espera trabajar 38 años en total), ¿cuál es la matrícula máxima que debería estar dispuesto a pagar para hacer el curso?
   (b) ¿Cuál sería su respuesta a la parte a) si espera pagar un 30% en impuestos?

4. Suponga que todos los consumidores nacen con un patrimonio financiero nulo y viven durante tres periodos: juventud, madurez y vejez. Trabajan durante los dos primeros y se jubilan en el último. Su renta es de 5 euros en el primer periodo, de 25 en el segundo y de 0 en el último.

   La inflación y la inflación esperada son nulas y el tipo de interés real también es nulo.
   (a) ¿Cuál es el valor actual descontado de la renta laboral al comienzo de la vida? ¿Cuál es el nivel de consumo más alto con el que este es el mismo en los tres periodos?
   (b) ¿Cuál es la cantidad de ahorro que permite a los consumidores de cada grupo de edad mantener el nivel constante de consumo calculado en la parte a)? Pista: el ahorro puede ser una cifra negativa si el consumidor necesita pedir un préstamo para mantener un cierto nivel de consumo.
   (c) Suponga que en cada periodo nacen n personas. ¿Cuál es el ahorro total de la economía? Pista: sume el ahorro de cada grupo de edad. Recuerde que algunos grupos de edad pueden tener un ahorro negativo. Explique la respuesta.

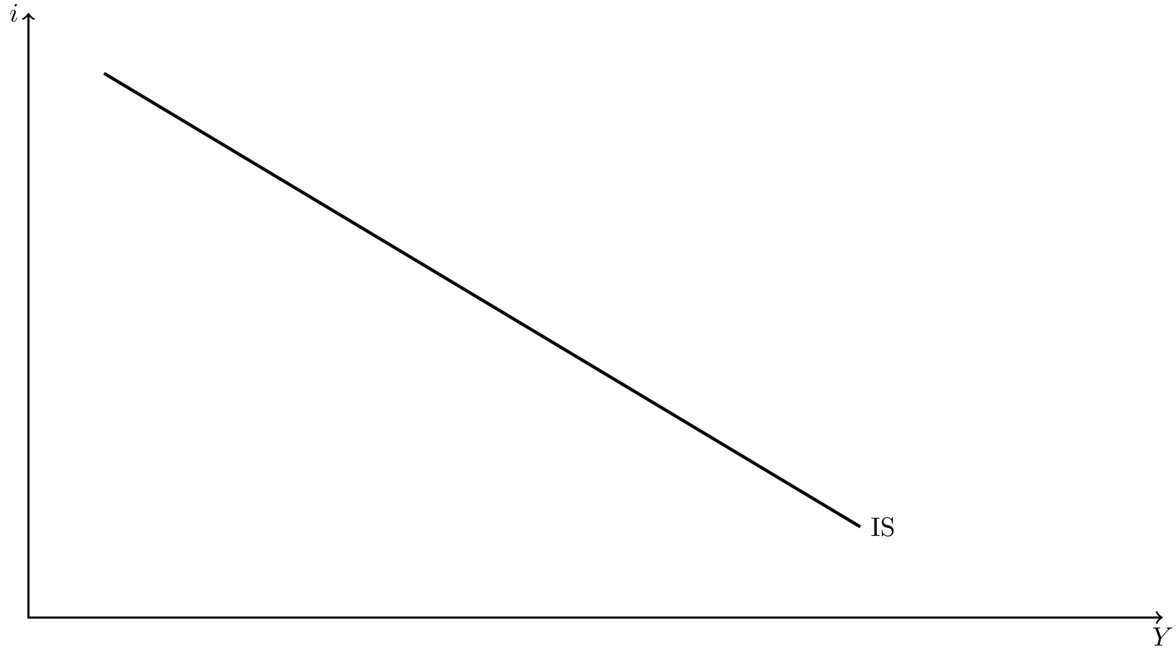
(d) ¿Cuál es el patrimonio financiero total de la economía? Pista: calcule el patrimonio financiero de las personas al comienzo del primer periodo de vida, del segundo periodo de vida, del tercer periodo de vida. Sume las tres cifras obtenidas. Recuerde que las personas pueden estar endeudadas, por lo que el patrimonio financiero puede ser negativo.

CHAPTER VI:

Expectations: Output and Policy

1. Para responder esta pregunta, haga uso de la figura 5, que representa una economía en la cual los agentes pueden mantener su riqueza financiera ya sea en dinero o en acciones. En la figura se muestra una curva IS inicial.

Figure 5: IS-LM diagram for question 1



   (a) Suponga que el banco central conduce su política monetaria fijando la tasa nominal de interés i (en vez de fijar la oferta de dinero M directamente). Dibuje la curva LM correspondiente a esta política (rotúlela "LM").

   (b) Debido a que la confianza de los consumidores ha mejorado, el gasto de consumo agregado aumenta. Represente este evento dibujando la curva respectiva en el diagrama (rotúlela "1").

   (c) Suponga que los agentes económicos esperan que el banco central no cambie su política monetaria en respuesta al aumento del consumo. **Mencione** qué sucede con el nivel de producción Y, la tasa de interés i, y **explique** que sucede con el precio de las acciones.

   (d) Ahora suponga que los agentes económicos esperan que el banco central cambie su política monetaria en respuesta al aumento del consumo, de manera tal que el nivel de producción se mantenga constante (en el nivel que tenía antes del aumento del consumo). Represente este cambio de política monetaria en la figura (rotúlelo "2"), y **explique** que sucede con el precio de las acciones.

CHAPTER VII:

The consumer's problem(s)

1 A consumer problem: 2 goods

A consumer gets utility from consuming goods x and y according to a utility function:

$$U(x, y)$$

The prices of the goods are p_x and p_y, and the consumer has available (nominal) income M. The budget constraint is therefore

$$p_x x + p_y y = M \tag{1}$$

The consumer wants to get as much utility as possible, given the market prices and his income. The Lagrangean for this optimization problem is

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda(M - p_x x - p_y y)$$

where λ is the Lagrange multiplier associated with the budget constraint. In the optimal allocation $(x^*,\ y^*)$, it must be the case that

$$U_x\left(x^*,\ y^*\right) = \lambda p_x \tag{2a}$$
$$U_y\left(x^*,\ y^*\right) = \lambda p_y \tag{2b}$$
$$p_x x^* + p_y y^* = M$$

where U_x and U_y denote the partial derivatives of the utility function with respect to x and to y, respectively.

1.1 A Cobb-Douglas utility function

In what follows, we assume that the utility function takes the form of a Cobb-Douglas function:

$$U(x, y) = x^{\theta} y^{1-\theta} \tag{3}$$

and we define the price index P by

$$P\left(p_x, p_y\right) \equiv \left(\frac{p_x}{\theta}\right)^{\theta} \left(\frac{p_y}{1-\theta}\right)^{1-\theta}$$

where $0 < \theta < 1$.

1. (a) Prove that both the utility function and the price index are homogeneous of degree one.
   (b) Show that the marginal utilities with respect to the goods are given by

   $$U_x \equiv \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\theta U}{x} \qquad \text{and} \qquad U_y \equiv \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{(1-\theta)U}{y}$$

   [Hint: take logs in both sides of (7)]
   (c) Dividing (11a) by (11b), we find that in the optimal allocation it must be the case that

   $$\frac{U_x}{U_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

   Use this result to show that the optimal allocation x^* and y^* must satisfy the following condition:

   $$\frac{x^*}{y^*} = \frac{\theta p_y}{(1-\theta)p_x} \tag{4}$$

(d) Use (10) and (8) to prove that the demand for goods are given by:

$$x^*(p_x, p_y, M) = \frac{\theta M}{p_x} \qquad\qquad y^*(p_x, p_y, M) = \frac{(1-\theta)M}{p_y} \tag{5}$$

Explain what this results implies.

(e) Show that the Lagrange multiplier associated with the budget constraint equals the inverse of the price index, that is: $\lambda^* = P^{-1}$. To do so, you can follow these steps:

1. Knowing that U is homogeneous of degree one, find an expression for $\frac{U}{y}$. The result should depend on the ratio $\frac{x}{y}$
2. Use the result of step 1 to compute the marginal utility of y (see question (b)).
3. Use step 2 and equation (11b) to obtain an expression for λ that depends on $\frac{x}{y}$.
4. Finally, replace $\frac{x}{y}$ from step 3 with equation (8).

(f) Use the previous result to show that the partial derivative of the Lagrangean with respect to the nominal income M equals P^{-1}.

(g) Substitute (9) into (7) to prove that the *indirect utility function*[1] is given by:

$$V(p_x, p_y, M) \equiv U(x^*, y^*) = \frac{M}{P}$$

(h) Compute the derivative of the indirect utility function with respect to M. Compare your result to that of question f.

(i) Using (8), show that elasticity of substitution of the goods is given by 1. That is, prove that

$$\frac{\Delta\% \left(\frac{x^*}{y^*}\right)}{\Delta\% \left(\frac{p_x}{p_y}\right)} = -1$$

1.2 A CES utility function

In what follows, we assume that the utility function takes the form of a CES function:

$$U(x, y) = \left(\theta x^\rho + (1-\theta) y^\rho\right)^{1/\rho} \tag{7}$$

and we define the price index P by

$$P\left(p_x, p_y\right) \equiv \left[\theta^\sigma p_x^{1-\sigma} + (1-\theta)^\sigma p_y^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

where $\rho < 1$ and $\sigma \equiv \frac{1}{1-\rho}$.

2. (a) Prove that both the utility function and the price index are homogeneous of degree one.

(b) Show that the marginal utilities with respect to the goods are given by

$$U_x \equiv \frac{\partial U}{\partial x} = \theta \left(\frac{U}{x}\right)^{1-\rho} \qquad \text{and} \qquad U_y \equiv \frac{\partial U}{\partial y} = (1-\theta)\left(\frac{U}{y}\right)^{1-\rho}$$

[Hint: raise both sides of (7) to the power of ρ]

[1] The indirect utility function is a particular case of a *value function*.

(c) Dividing (11a) by (11b), we find that in the optimal allocation it must be the case that

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

Use this result to show that the optimal allocation x^* and y^* must satisfy the following condition:

$$\frac{x^*}{y^*} = \left(\frac{\theta p_y}{(1-\theta)p_x}\right)^\sigma \tag{8}$$

(d) Use (10) and (8) to prove that the demand for goods are given by:

$$x^*(p_x, p_y, M) = \left(\frac{\theta}{p_x/P}\right)^\sigma \frac{M}{P} \qquad y^*(p_x, p_y, M) = \left(\frac{1-\theta}{p_y/P}\right)^\sigma \frac{M}{P} \tag{9}$$

(e) Show that the Lagrange multiplier associated with the budget constraint equals the inverse of the price index, that is: $\lambda^* = P^{-1}$. To do so, you can follow these steps:

1. Knowing that U is homogeneous of degree one, find an expression for $\frac{U}{y}$. The result should depend on the ratio $\frac{x}{y}$
2. Use the result of step 1 to compute the marginal utility of y (see question (b)).
3. Use step 2 and equation (11b) to obtain an expression for λ that depends on $\frac{x}{y}$.
4. Replace $\frac{x}{y}$ from step 3 with equation (8).
5. Finally, simplify the result, keeping in mind that $\sigma \equiv \frac{1}{1-\rho}$.

(f) Use the previous result to show that the partial derivative of the Lagrangean with respect to the nominal income M equals P^{-1}.

(g) Substitute (9) into (7) to prove that the *indirect utility function*[2] is given by:

$$V(p_x, p_y, M) \equiv U(x^*, y^*) = \frac{M}{P}$$

(h) Compute the derivative of the indirect utility function with respect to M. Compare your result to that of question f.

(i) Using (8), show that elasticity of substitution of the goods is given by σ. That is, prove that

$$\frac{\Delta\%\left(\frac{x^*}{y^*}\right)}{\Delta\%\left(\frac{p_x}{p_y}\right)} = -\sigma$$

(j) Optional: show that

$$\lim_{\rho \to 0} U(x, y) = x^\theta y^{1-\theta}$$

that is, that the Cobb-Douglas is a special case of the CES function where $\rho = 0$. Hint: Remember that $\lim_{z\to 0} g(z) = e^{\lim_{z\to 0} \ln g(z)}$. Hint 2: You will need L'Hôpital rule.

2 Optimization with Inequality Constraints

For each of the problems, find the values of x and y that maximize function $f(x, y)$ subject to the given constraints.

[2]The indirect utility function is a particular case of a *value function*.

3. $f(x,y) = -(x-4)^2 - (y-4)^2$ subject to $x + y \leq 4$.
4. $f(x,y) = -(x-4)^2 - (y-4)^2$ subject to $x + y \leq 4$ and $x \leq 1$.
5. $f(x,y) = \left(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right)^2$ subject to $2x + y \leq 17$
6. $f(x,y) = \left(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right)^2$ subject to $2x + y \leq 17$ and $x \geq 5$.
7. $f(x,y) = \left(\theta\sqrt{x} + (1-\theta)\sqrt{y}\right)^2$ subject to $\ln x + \ln y \leq A$
8. $f(x,y) = 3x + 2y$ subject to $2x + y \leq 12$
9. $f(x,y) = 3x + 2y$ subject to $2x + y \leq 12$ and $x \geq 2$

3 A consumer problem: convex utility

A consumer gets utility from consuming goods x and y according to the utility function:

$$U(x,y) = x^2 + y^2$$

Since the prices of the goods are p_x and p_y, the budget constraint is

$$p_x x + p_y y = M \tag{10}$$

where M is available income. The consumer wants to maximize utility given his budget constraint. The Lagrangian for this optimization problem is

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(M - p_x x - p_y y)$$

where λ is the Lagrange multiplier associated with the budget constraint. The first-order condition corresponding to this Lagrangian are

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda p_x && \text{(11a)} \\ 2y &= \lambda p_y && \text{(11b)} \\ p_x x + p_y y &= M \end{aligned}$$

10. (a) Solve the system of equations (11) to obtain x^*, y^*, λ^*.
    (b) Obtain the value function $V(M, p_x, p_y) \equiv U(x^*, y^*)$
    (c) Let $U^{(i)}$ be the utility obtained from spending all available income M on good $i = x, y$. Compute $U^{(x)}$ and $U^{(y)}$.
    (d) Show that $U^{(x)} > V(M, p_x, p_y)$ and $U^{(y)} > V(M, p_x, p_y)$
    (e) The result from last question contradicts that the allocation found in part (a) is optimal, because we found two feasible bundles that generate higher utility. Explain what went wrong.
11. Repeat question 1, but assume that the utility function is

    $$U(x,y) = x^2 y^2$$

    instead of $U(x,y) = x^2 + y^2$
    (a) Write down the new Lagrangian and the first-order conditions
    (b) Obtain the optimal amounts x^*, y^*, λ^*
    (c) Obtain the value function $V(M, p_x, p_y) \equiv U(x^*, y^*)$
    (d) Compute $U^{(x)}$ and $U^{(y)}$, as defined in question 1. Show that they are less than the value function.
    (e) Looks like we no longer have the contradiction mentioned in question 1e. Why not?
    (f) Is the new utiliy function $U(x,y) = x^2 y^2$ concave? Quasi-concave?

4 Roy's identity

12. MacGyver desea gastar **todos** sus M colones en manzanas y peras. Si consume x manzanas y y peras obtiene utilidad

$$U(x,y) = \left(x^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + y^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

donde $\sigma > 0$. El precio de las manzanas es p_x y el de las peras p_y (ambos en colones por unidad). El índice de precios P está definido por

$$P\left(p_x, p_y\right) \equiv \left[p_x^{1-\sigma} + p_y^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

(a) Escriba la restricción presupuestaria de MacGyver.

(b) Suponga que MacGyver quiere optimizar su consumo de manzanas y peras. Escriba el Lagrangiano correspondiente a su problema (pista: asuma que la solución **no** es de esquina).

(c) Obtenga las demandas marshallianas por manzanas y peras de MacGyver.

CHAPTER VIII:

Applications of consumer theory

1 Incertidumbre

1. Pepe tiene riqueza $w > 1$ y su utilidad de Bernoulli es

$$u(w) = \frac{(w-1)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

donde $\sigma > 1$. Estamos interesados en medir su avesión al riesgo, la cual sabemos que está relacionada con la curvatura (concavidad) de su utilidad u.

(a) Explique brevemente por qué no es conveniente usar la segunda derivada de su utilidad $u''(w)$ como una medición de su aversión al riesgo.

(b) Obtenga la aversión **relativa** al riesgo de Pepe, en función de su riqueza.

(c) ¿Qué sucede con la aversión relativa al riesgo de Pepe conforme aumenta su riqueza?

2 Oferta de trabajo

2. Tywin tiene 24 horas disponibles al día, y debe decidir cuántas horas diarias trabajar. La tasa salarial es w, y su única fuente de ingreso es lo que percibe por trabajar. Tywin no paga impuestos. Sus preferencias por ocio l y consumo c están representadas por la función de utilidad.

$$u(c, l) = cl^2$$

Tywin desea maximizar su utilidad, dada su restricción presupuestaria, y dado que $0 \leq l \leq 24$ y $c \geq 0$.

(a) Plantee la restricción presupuestaria.

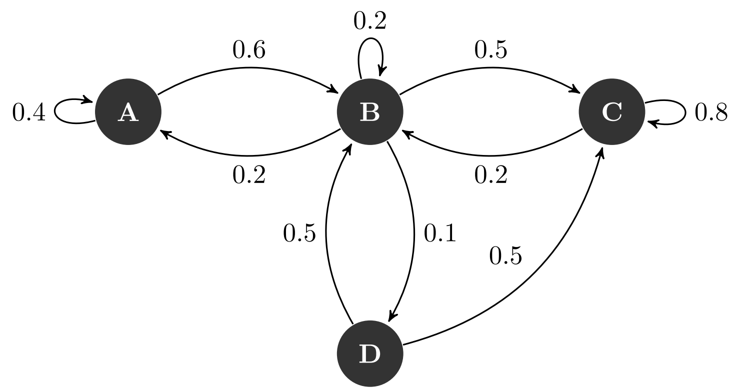
(b) Obtenga la oferta de trabajo de Tywin, es decir, una función que exprese cuántas horas trabaja Tywin cuando el salario es w.

(c) Si el salario aumenta de 4 a 6, ¿cuánto cambia el número de horas que trabaja Tywin?

CHAPTER IX:

Markov processes

1. Considere la siguiente cadena de Markov



   (a) Escriba la matriz de transición P correspondiente a esta cadena de Markov.

   (b) Encuentre su vector de probabilidad estacionaria π.

2. Considere una cadena de Markov de dos estados, 0 y 1. Cuando el sistema está en estado 0, permanece en él con probabilidad 0.4. Cuando el sistema está en estado 1, cambia al estado 0 con probabilidad 0.8. Represente esta cadena de Markov con un gráfico (similar al de la pregunta 1) y escriba su matriz de transición.

3. Juan está practicando tiros libres en la cancha de baloncesto. Cada vez que encesta su confianza mejora y su probabilidad de encestar en el siguiente tiro es 0.9. Por otra parte, cada vez que falla su confianza empeora y la probabilidad de encestar su próximo tiro es de 0.6. En el largo plazo, ¿qué porcentaje de tiros encesta Juan?

4. Un trabajador puede estar {desempleado, empleado}. La transición entre estos dos estados está dada por la matriz de Markov:
$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$
   Cuando está empleado, el trabador recibe ingreso w, cuando está desempleado recibe asistencia social con valor ψ, donde $0 < \psi < w$. El tiempo se mide en meses.

   (a) Suponga que el trabajador acaba de perder su empleo. ¿Cuántos meses se espera que estará desempleado?

   (b) ¿Qué porcentaje de los meses estará desempleado el trabajador en el largo plazo?

   (c) En datos del mercado laboral, se ha determinado que la tasa natural de desempleo es de 10% y que la duración promedio del desempleo es de 4 meses. Use estos datos para calibrar los parámetros p y q de la matriz de transición. Para ello, asuma que la tasa natural de desempleo (proporción de los *trabajadores* que están desempleados) es equivalente a la tasa de desempleo de largo plazo (proporción de los *meses* que un trabajador está desempleado).

   (d) Sean H^u y H^e la riqueza humana del trabajador cuando está desempleado y empleado, respectivamente. Determine sus valores en términos de w, ψ, p, q and r, donde r es la tasa de descuento intertemporal.

   (e) Calcule la diferencia $H^e - H^u$.

   (f) Ahora suponga que $p + q = 1$. ¿A qué es igual $H^e - H^u$ ahora? Interprete este resultado.

   (g) En datos del mercado laboral, se ha determinado que la tasa natural de desempleo es de 12% y que la duración promedio del desempleo es de 6 meses. Use estos datos para calibrar los parámetros p y q de la matriz de transición. Para ello, asuma que la tasa natural de desempleo (proporción de los *trabajadores* que están desempleados) es equivalente a la tasa de desempleo de largo plazo (proporción de los *meses* que un trabajador está desempleado).

5. Considere el proceso AR(1) dado por

$$y_t = 2 + 0.8y_{t-1} + \epsilon_t$$

donde ϵ_t es ruido blanco con varianza σ^2.

(a) Determine el valor de $\mathbb{E}[y_5|y_4 = 7]$

(b) Determine el valor de $\mu \equiv \mathbb{E}[y_t]$

CHAPTER X:

Dynamic programming

1. Con respecto a la **ecuación de Bellman** para un problema de horizonte infinito:
   (a) ¿Cuál es la **incógnita** de la ecuación?
   (b) Mencione los tres métodos disponibles para resolver la ecuación de Bellman.

2. En el problema de un consumidor con horizonte infinito, quien al inicio del período tiene A unidades de consumo, su problema de optimización puede escribirse como:

$$V(A) = \max_{c,A'} \{u(c) + \beta V(A')\}$$

   donde la 'prima' indica una variable del siguiente período. La restricción presupuestaria es:

$$A' = R(A - c)$$

   La condición de primer orden para este problema es

$$u'(c) = R\beta V'(A')$$

   (a) ¿Qué nombre recibe la ecuación 2?
   (b) ¿Cuál es la variable de estado?
   (c) ¿Cuál es la variable de control?
   (d) ¿Cuál es la incógnita de la ecuación 2?
   (e) Explique en palabras el significado de la ecuación 2.
   (f) En este problema, ¿qué es la función de política? (No la obtenga, sólo describa lo que es)
   (g) Interprete la ecuación 2

3. Suponga que usted tiene una mina de cobre. Su licencia para extraer cobre de la mina expirará en 3 años y no será renovada. Se sabe que aún quedan 128 toneladas de cobre en la mina. El precio del cobre está fijo en \$1 por tonelada. El costo de extraer el cobre es $\frac{q_t^2}{x_t}$, donde q_t es la cantidad extraída y x_t es el stock de cobre remanente en la mina al inicio del período de extracción. Por simplidad, se asume que el factor de descuento es $\beta = 1$.
   (a) Si en el período t se extraen y se venden q_t toneladas de las x_t toneladas existentes en la mina, ¿cuál es la utilidad del período?
   (b) En el período t, ¿cuál es el costo marginal de producción (extracción) z_t?
   (c) ¿Qué valor tiene para usted la mina una vez que su licencia de extracción haya expirado?
   (d) Usted desea maximizar el valor actual de la suma utilidades de los tres periodos. Escriba una expresión para representar su función objetivo.
   (e) ¿Cómo evoluciona el stock de cobre de la mina? Escriba una ecuación que describa esta restricción intertemporal.
   (f) V_t es el valor que tiene la mina al inicio de t. Escriba la ecuación de Bellman que describe cómo evoluciona el valor de la mina en el tiempo.
   (g) Utilice programación dinámica para resolver este problema. Use sus resultados para completar esta tabla

t	Stock x_t	Extracción q_t	Costo marginal z_t	Valor de la mina V_t
0	128			
1				
2				
3		0 (cerrado)		

   (h) ¿Es deseable extraer todo el cobre de la mina durante estos tres años? Explique.

1 Un problema de consumidor con horizonte infinito

1. Suponga que un consumidor con horizonte infinito desea optimizar el valor presente descontado de utilidad:

$$U(c_0, c_1, \dots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

donde c_t es el consumo del período t, el término $\sigma > 0$ es un parámetro, y $0 < \beta < 1$ representa un factor de descuento. Al inicio del período 0, el consumidor cuenta con activos por valor de $a_0 > 0$. El consumidor puede ahorrar o endeudarse, con tasa de interés r. Así, su restricción presupuestaria es:

$$a_{t+1} = (1+r)(a_t - c_t), \qquad \forall t = 0, 1, \dots$$

donde asumimos que el consumidor no recibe ingresos en ningún período (es decir, $y_t = 0 \quad \forall t$)

(a) Demuestre que la aversión relativa al riesgo de este consumidor es constante.

(b) Tal como está descrito, el problema del consumidor es recursivo, y por lo tanto puede resolverse por programación dinámica. Escriba la ecuación de Bellman correspondiente a este problema, **sin sustituir aún la restricción presupuestaria**. Indique explícitamente:

- la(s) variable(s) de estado
- la(s) variable(s) de control
- la función de transición
- la función de valor

(c) Sustituya la restricción presupuestaria en la ecuación de Bellman (pista: hay dos maneras de hacerlo, recuerde que una es más conveniente que la otra). Obtenga la condición de primer order del problema.

(d) Obtenga la condición de la envolvente (también llamada la fórmula de Benveniste y Scheinkman).

(e) Obtenga la ecuación de Euler.

CHAPTER XI:

Firm's theory

CHAPTER XII:

Asset pricing model

1. En el modelo CCAPM (valoración de los activos de capital basado en consumo) encontramos la siguiente relación:
$$\mathbb{E}_t\left[R_{it}\right] - R_{0t} = \frac{\operatorname{Cov}_t\left[R_{Mt},\ R_{it}\right]}{\operatorname{Var}_t\left[R_{Mt}\right]}\left[\mathbb{E}_t\left[R_{Mt}\right] - R_{0t}\right]$$
Explique su significado.

2. En los modelos de equilibrio general hemos considerado dos enfoques:
   - el equilibrio competitivo, y
   - el equilibrio del planificador central.

   Explique en qué se diferencian estos enfoques.

3. En el modelo CCAPM (valoración de los activos de capital basado en consumo) encontramos la siguiente relación:
$$\mathbb{E}_t\left[R_{it}\right] - R_{0t} = \frac{\operatorname{Cov}_t\left[R_{Mt},\ R_{it}\right]}{\operatorname{Var}_t\left[R_{Mt}\right]}\left[\mathbb{E}_t\left[R_{Mt}\right] - R_{0t}\right]$$
Explique su significado.

4. En la economía hay $N+1$ activos, los cuales en el período t pagan dividendos y_{it} y luego se transan al precio P_{it} (después de pagar dividendos), donde $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ es uno de los activos. Asuma que los dividendos son aleatorios, y que varían en el tiempo como un proceso de Markov.

   Un consumidor con horizonte infinito desea maximizar el valor esperado presente descontado de utilidad:
$$\mathbb{E}\left[U(c_0, c_1, \dots) \mid z_0\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \mid z_0\right]$$
   donde c_t es el consumo del período t, $0 < \beta < 1$ representa un factor de descuento, y z_t representa un vector de infomación para predecir los dividendos de cada activo, que sigue una cadena de Markov:
$$F_t(z_{t+1}) = F(z_{t+1} \,|\, z_t).$$
   Al inicio del período 0, el consumidor con horizonte infinito tiene una dotación de S_{i0} acciones del activo i, con $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, los cuales tienen un valor de mercado
$$a_t \equiv \sum_{i=0}^{N} \left(y_{it} + P_{it}\right) s_{it}$$
   El problema del consumidor consiste en escoger su nivel de consumo y tenencias de activos, dada su restricción presupuestaria, de manera tal que maximize su utilidad esperada, es decir:
$$\max_{c_t, s_{0:N,t}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t\right) \ | z_0\right] \quad \text{subject to} \quad c_t + \sum_{i=0}^{N} P_{it} s_{it+1} \leq a_t \qquad \forall t = 0, 1, \dots$$
   (a) Tal como está descrito, el problema del consumidor es recursivo, y por lo tanto puede resolverse por programación dinámica. Escriba la ecuación de Bellman correspondiente a este problema, **sin sustituir aún la restricción presupuestaria**. Indique explícitamente:
      - la(s) variable(s) de estado
      - la(s) variable(s) de control
      - la función de transición
      - la función de valor

(b) La ecuación de Euler de este problema es

$$P_{it}u'(c_t) = \beta\,\mathbb{E}\left[u'\left(c_{t+1}\right)\left(y_{i,t+1} + P_{i,t+1}\right)\ \mid z_t\right] \qquad \forall i, t$$

Suponga que las preferencias del consumidor son neutrales al riesgo. Demuestre que en tal caso el precio del activo i en el período 0 es

$$P_{i0} = \mathbb{E}_0\left[\sum_{s=1}^{\infty} \beta^s y_{is}\right]$$

Interprete este resultado.

CHAPTER XIII:

Firm's investment

1. Para obtener la ecuación de inversión, asumimos que la empresa era neutral al riesgo y que su flujo de caja viene representado por este cuadro

Table 1: Flujo de caja de la empresa

Ventas del bien final	$P_{Y_t} Y_t$
- pago a trabajadores	$-w_t Nt$
- inversión en nuevas máquinas	$-P_{I_t} I_t$
- costo de ajustar el capital	$-P_{I_t} G(I_t, K_t)$
= flujo de caja neto de la producción	$= X_t$
- dividendos pagados	$-d_t S_t$
+ nuevos aportes de capital accionario	$+P_{S_t}(S_{t+1} - S_t)$
+ emisión de bonos	$+P_{B_t} B_{t+1}$
- repago de bonos	$-B_t$
= flujo neto de caja	$= 0$

La empresa deseaba maximizar su propio valor, escogiendo el nivel capital K_t y trabajo N_t, sujeto al flujo de caja y a la restricción $K_t = \lambda K_{t-1} + I_t$, donde K_{t-1} es el capital que ya está instalado.

Las condiciones de primer orden de este problema de maximización son

$$P_{Y_t} F_{N_t} = w_t$$

$$P_{Y_t} F_{K_t} - P_{I_t} G_{K_t} + \beta\lambda \mathbb{E}_t \left(\frac{\partial V_{t+1}}{\partial(\lambda K_t)} \right) = P_{I_t}(1 + G_{I_t})$$

(a) Explique estas condiciones de primer orden.

(b) En un problema de la empresa convencional, las condiciones de primer orden hubiesen sido

$$P_{Y_t} F_{N_t} = w_t$$
$$P_{Y_t} F_{K_t} = r_t$$

Explique detalladamente por qué la condición de primer orden respecto al trabajo es la misma, pero no así la condición respecto al capital.

2. La teoría Modigliani-Miller explica el valor de una empresa.

(a) Según este teorema, ¿de qué depende el valor de una empresa?

(b) Explique cómo se vería afectado el valor de una empresa si cambia su estructura de dividendos.

3. Según la teoría de inversión vista en clase, si el costo de ajuste del capital es cuadrático, la política óptima de inversión sería

$$\frac{I_t}{K_t} = a + \frac{1}{b}\left(\frac{q_t^*}{P_{I_t}} - 1 \right) + \epsilon_t$$

Explique el significado de este resultado, indicando claramente qué representa cada una de las variables de esta ecuación.

CHAPTER XIV:

A Closed-Economy One-Period Macroeconomic Model

1. En los modelos de equilibrio general hemos considerado dos enfoques:

   - el equilibrio competitivo, y
   - el equilibrio del planificador central.

   Explique en qué se diferencian estos enfoques.

2. Considere un modelo de equilibrio general competitivo de un sólo período, en el que interactúan tres actores: un consumidor representativo, una empresa representativa, y el gobierno.

   El gobierno provee G unidades de un bien público, el cual financia fijando un impuesto fijo de T unidades al consumidor. El presupuesto del gobierno está equilibrado (no hay déficit ni superávit fiscal)

   El consumidor dispone de h horas, y debe escoger el nivel de consumo C y ocio l que maximicen su utilidad

   $$U(C,l,G) = (C^\rho + G^\rho)^{1/\rho} + \psi \ln l$$

   Note que la utilidad del consumidor depende del bien público, pero el consumidor no puede escoger su nivel. Además, el tiempo que no gasta en ocio lo ofrece en el mercado laboral (es decir, $L^s = h - l$). Los ingresos del consumidor corresponden a la suma de sus ingresos laborales y dividendos π (el consumidor es el dueño de la empresa), los cuales gasta completamente en comprar el bien de consumo y pagar un monto fijo de impuestos T. La tasa salarial es w.

   Por su parte, **la empresa** produce el bien final (una parte C la comprará el consumidor, el resto G lo comprará el gobierno), para lo cual requiere de trabajo L^d (el cual compra al consumidor) y capital K (cuya cantidad está fija, le pertenece a la empresa, y se deprecia completamente después del proceso de producción). La función de producción es

   $$Y = zK^\alpha {L^d}^{1-\alpha}$$

   donde z es la productividad total de los factores.

   (a) (10 points) Defina **el equilibrio competitivo** de esta economía, asumiendo que G es exógeno. (escriba explícitamente el sistema de ecuaciones que definen tal equilibrio, pero no resuelva el sistema.)

   (b) (10 points) En un diagrama represente la frontera de posibilidades de producción, con C en el eje vertical y l en el horizontal. Use el diagrama para explicar qué sucede con el consumo y el ocio si aumenta la productividad total de los factores z.

   (c) (10 points) Defina **el equilibrio del planificador social** de esta economía, asumiendo que G es endógeno y que el gobierno es el planificador social. (escriba explícitamente el sistema de ecuaciones que definen tal equilibrio, pero no resuelva el sistema.)

   (d) (5 points) Explique por qué, en principio, la asignación de recursos del planificador social no coincide con la del equilibrio competitivo.

CHAPTER XV:

Dynamic Stochastic General Equilibrium Model