Modelos de volatilidad

Randall Romero Aguilar, PhD

randall.romero@ucr.ac.cr

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 26 de abril de 2020

UCR UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. Introducción

La volatilidad de muchas series no es constante

- En modelos econométricos convencionales, se asume que la varianza del término de error es constante.
- Muchas series de tiempo económicas exhiben períodos de volatilidad inusualmente alta, seguidos por períodos de relativa tranquilidad.
- En tales circunstancias, el supuesto de homoscedasticidad es inapropiado.
- En ocasiones, uno puede estar interesado en pronosticar la varianza condicional de una serie.

- Consideremos el mercado accionario. Algunas veces el mercado es muy volátil, otras veces no.
- La volatilidad del retorno de las acciones determina el riesgo de las inversiones.
- En finanzas se tiene por cierto que el riesgo y el retorno están correlacionados positivamente
- Para hacer buenas inversiones, es crucial entender el riesgo apropiadamente.

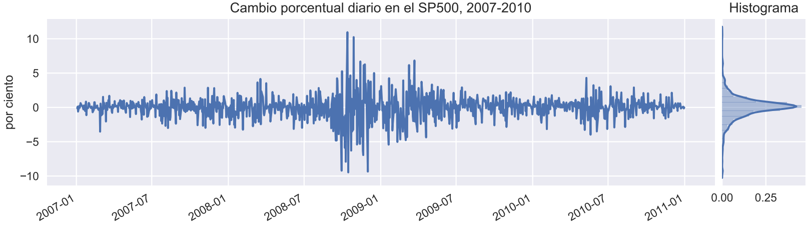


Figura: Volatilidad en el mercado accionario

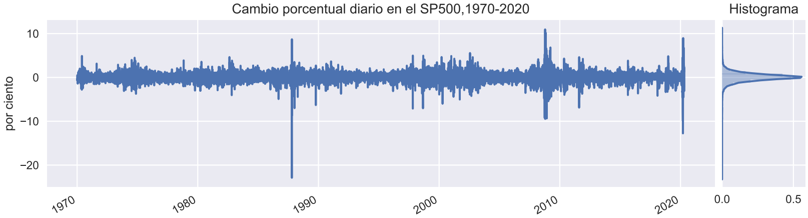
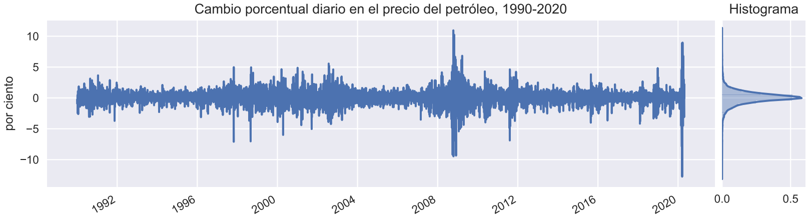


Figura: Volatilidad en el mercado petrolero



Pronosticando la varianza

- Un enfoque para pronosticar la varianza es introducir explícitamente una variable independiente que ayude a predecir la volatilidad.
- Por ejemplo

$$\overset{\text{variable de interés}}{y_{t+1}} = \underset{\text{variable independiente observable en } t}{x_t}\;\overset{\text{ruido blanco con varianza } \sigma^2}{\epsilon_{t+1}}$$

- Si $x_t = x_{t-1} = \dots$ una constante, entonces $\{y_t\}$ es ruido blanco.
- De lo contrario, la varianza de y_{t+1} condicional en el valor observado x_t es

$$\operatorname{Var}\left(y_{t+1} \,|\, x_t\right) = x_t^2 \sigma^2$$

- Si x_t tiene correlación serial positiva, entonces la varianza condicional de y_{t+1} también la tendrá.

2. El modelo ARCH

El modelo ARCH

- El modelo ARCH fue desarrollado por Engel (1982)
- Este trabajo le hizo co-ganador del Premio Nobel de Economía de 2003.
- En términos generales, todos los modelos ARCH (y GARCH, que estudiamos más adelante) consisten en dos ecuaciones
    1. una ecuación de la media, que describe la evolución de la variable de interés y_t,
    2. una ecuación de la varianza, que describe la evolución de la varianza de y_t.
- En adelante, vamos a denotar por Ω_t todos los datos realizados hasta la fecha t.

El modelo ARCH(1)

ARCH(1)

El modelo ARCH(1) está definido por estas dos ecuaciones:

$$y_t = c + \epsilon_t \qquad \text{(media)}$$

$$\epsilon_t = u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2} \qquad \text{(varianza)}$$

donde $u_t \sim N(0, 1)$, $\alpha_0 > 0$, y $\alpha_1 > 0$.

- A continuación estudiamos los momentos condicionales y no condicionales del término de error ϵ_t.
- Luego vemos los momentos de la variable y_t.

Momentos del término de error

- La media incondicional del término de error es cero:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\epsilon_t &= \mathbb{E}\left[u_t\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2}\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left[u_t\right]}_{=0}\mathbb{E}\left[\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2}\right] = 0\end{aligned}$$

- De manera similar, la media condicional en información previa también es cero:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\epsilon_t|\Omega_{t-1}\right] &= \mathbb{E}\left[u_t\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2}\,\middle|\Omega_{t-1}\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left[u_t\;|\Omega_{t-1}\right]}_{=0}\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2} = 0\end{aligned}$$

- Elevando al cuadrado la ecuación de la varianza es fácil calcular la varianza no condicional del error ϵ:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_t^2 &= u_t^2\left(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2\right) \\
\mathbb{E}\,\epsilon_t^2 &= \mathbb{E}\left[u_t^2\left(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left(u_t^2\right)\mathbb{E}\left(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2\right) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left(u_t^2\right)}_{=1}\left(\alpha_0 + \alpha_1\underbrace{\mathbb{E}\,\epsilon_{t-1}^2}_{=\mathbb{E}\,\epsilon_t^2}\right) \\
\operatorname{Var}\left(\epsilon_t\right) &= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}
\end{aligned}
$$

- De manera similar, la varianza condicional en la información disponible a $t-1$ es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\epsilon_t^2|\Omega_{t-1}\right] &= \mathbb{E}\left[u_t^2\left(\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2\right)|\Omega_{t-1}\right]\\ &= \left(\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2\right)\underbrace{\mathbb{E}\left[u_t^2|\Omega_{t-1}\right]}_{=1}\end{aligned}$$

- Por lo tanto:

$$\mathrm{Var}\left[\epsilon_t|\Omega_{t-1}\right] = \alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2$$

- Vemos que la varianza condicional tiene forma autorregresiva, de ahí el nombre del modelo ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*).

- Para futura referencia, resumimos en esta tabla los momentos que hemos calculado para la perturbación ϵ_t

	Incondicional	Condicional
Media	$\mathbb{E}\,\epsilon_t = 0$	$\mathbb{E}\left[\epsilon_t \vert \Omega_{t-1}\right] = 0$
Varianza	$\mathrm{Var}\,\epsilon_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$	$\mathrm{Var}\left[\epsilon_t \vert \Omega_{t-1}\right] = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2$

Momentos del proceso y

- La media incondicional de y_t es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(y_t\right) &= \mathbb{E}\left(c + \epsilon_t\right) \\
&= c + \mathbb{E}\left(\epsilon_t\right) \\
&= c
\end{aligned}$$

- mientras que su varianza incondicional es

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(y_t\right) &= \text{Var}\left(c + \epsilon_t\right) \\
&= \text{Var}\left(\epsilon_t\right) \\
&= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}
\end{aligned}$$

- La media condicional de y_t es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(y_t|\Omega_{t-1}\right) &= \mathbb{E}\left(c+\epsilon_t\left|\Omega_{t-1}\right.\right)\\ &= c+\mathbb{E}\left(\epsilon_t\left|\Omega_{t-1}\right.\right)\\ &= c\end{aligned}$$

- mientras que su varianza condicional es

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(y_t|\Omega_{t-1}\right) &= \operatorname{Var}\left(c+\epsilon_t\left|\Omega_{t-1}\right.\right)\\ &= \operatorname{Var}(\epsilon_t\left|\Omega_{t-1}\right.)\\ &= \operatorname{Var}\left(\epsilon_t\left|\epsilon_{t-1}\right.\right)\\ &= \alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2\end{aligned}$$

Ejemplo 1:

Simulando un modelo ARCH(1)

arch-simulaciones.do

- En este y algunos de los próximos ejemplos vamos a simular procesos ARCH y GARCH.
- En todos ellos, se ejecuta este código al inicio

```
* Fijar parámetros de las simulaciones
set obs 1000
set seed 12345
gen time = _n
tsset time
gen u = rnormal(0,1)
```

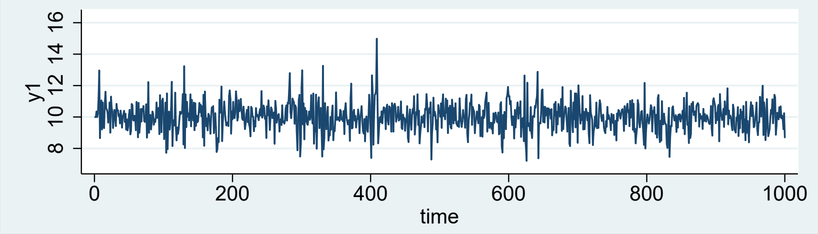
Este código genera una realización del modelo

$$y_t = 10 + \epsilon_t \qquad \epsilon_t = u_t\sqrt{0.4 + 0.5\epsilon^2_{t-1}}$$

```
local c = 10
local alpha0 = 0.4
local alpha1 = 0.5
gen ex = 0

replace ex = u*(`alpha0' + `alpha1'*(L.ex^2))^(1/2) in 2/L

gen x = `c' + ex
tsline x
```



Para estimar el modelo

```
arch x, arch(1)
```

```
ARCH family regression

Sample: 1 - 1000                        Number of obs = 1,000
Distribution: Gaussian                  Wald chi2(.)  =     .
Log likelihood = -1229.004              Prob > chi2   =     .

------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
           x |      Coef.   Std. Err.        z     P>|z|
-------------+----------------------------------------------------
x            |
       _cons |   9.993379   .0235107    425.06     0.000
-------------+----------------------------------------------------
ARCH         |
        arch |
         L1. |   .4658485   .0570226      8.17     0.000
             |
       _cons |   .4361722   .0295631     14.75     0.000
------------------------------------------------------------------
```

El modelo AR(1)-ARCH(1)

AR(1)-ARCH(1)

El modelo AR(1)-ARCH(1) está definido por estas dos ecuaciones:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t \qquad \text{(media)}$$

$$\epsilon_t = u_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2} \qquad \text{(varianza)}$$

donde $u_t \sim N(0,1)$, $|\phi| < 1$, $\alpha_0 > 0$, y $\alpha_1 > 0$.

- La ecuación de volatilidad es la misma de antes, por lo que los momentos de ϵ_t son los mismos del modelo ARCH(1).
- A diferencia del modelo ARCH(1), en esta especificación la media tiene una dinámica propia.
- Busquemos los momentos de la variable y_t.

- La media incondicional de y_t es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(y_t\right) &= \mathbb{E}\left(c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t\right) \\ &= c + \phi \underbrace{\mathbb{E}\left(y_{t-1}\right)}_{=\,\mathbb{E}\,y_t} + \underbrace{\mathbb{E}\left(\epsilon_t\right)}_{=0} \\ &= c + \phi\,\mathbb{E}\left(y_t\right) \\ &= \frac{c}{1-\phi}\end{aligned}$$

- mientras que la media condicional en Ω_{t-1} es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(y_t \mid \Omega_{t-1}\right) &= \mathbb{E}\left(c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t \mid \Omega_{t-1}\right) \\ &= c + \phi \underbrace{\mathbb{E}\left(y_{t-1} \mid \Omega_{t-1}\right)}_{=\,y_{t-1}} + \underbrace{\mathbb{E}\left(\epsilon_t \mid \Omega_{t-1}\right)}_{=0} \\ &= c + \phi y_{t-1}\end{aligned}$$

- Por simplicidad, asumamos que $\mathbb{E}\left(y_t\right) = 0$
- Entonces su varianza incondicional es

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(y_t\right) &= \mathbb{E}\left(y_t^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\phi^2 y_{t-1}^2 + 2\phi y_{t-1}\epsilon_t + \epsilon_t^2\right) \\
&= \phi^2 \underbrace{\mathbb{E}\left(y_{t-1}^2\right)}_{=\operatorname{Var}(y_t)} + 2\phi\,\mathbb{E}\left(y_{t-1}\epsilon_t\right) + \underbrace{\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right)}_{=\alpha_0/(1-\alpha_1)}
\end{aligned}
$$

$$
\left(1-\phi^2\right)\operatorname{Var}\left(y_t\right) = 2\phi \underbrace{\mathbb{E}\left(y_{t-1}u_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2}\right)}_{=0} + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}
$$

por lo que

$$
\operatorname{Var}\left(y_t\right) = \frac{1}{1-\phi^2}\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}
$$

- Por otra parte, su varianza condicional es

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(y_t \left|\Omega_{t-1}\right.\right) &= \operatorname{Var}\left(c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t \left|\Omega_{t-1}\right.\right) \\
&= \operatorname{Var}\left(\epsilon_t \left|\Omega_{t-1}\right.\right) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2:
Simulando un modelo AR(1)-ARCH(1)

arch-simulaciones.do

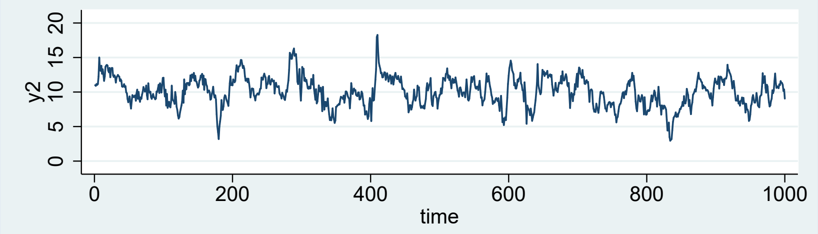
Este código genera una realización del modelo

$$y_t = 1 + 0.9 y_{t-1} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t = u_t \sqrt{0.4 + 0.5\epsilon^2_{t-1}}$$

```
local c = 1
local phi1 = 0.9
local alpha0 = 0.4
local alpha1 = 0.5
gen ey = 0

replace ey = u*(`alpha0' + `alpha1'*(L.ey^2))^(1/2) in 2/L

gen y = 11
replace y = `c' + `phi1'*L.y + ey in 2/L
tsline y
```



Para estimar el modelo

```
arch y L.y, arch(1)
```

```
ARCH family regression

Sample: 2 - 1000                    Number of obs  =        999
Distribution: Gaussian              Wald chi2(1)   =    6915.39
Log likelihood = -1227.867          Prob > chi2    =     0.0000

------------------------------------------------------------------
             |                OPG
           y |     Coef.   Std. Err.        z    P>|z|
-------------+----------------------------------------------------
y            |
           y |
         L1. |   .9127598   .0109761     83.16    0.000
             |
       _cons |   .8621232   .1121024      7.69    0.000
-------------+----------------------------------------------------
ARCH         |
        arch |
         L1. |   .4683382   .0572297      8.18    0.000
             |
       _cons |   .4350871   .0296678     14.67    0.000
------------------------------------------------------------------
```

El modelo ARCH(2)

ARCH(2)

El modelo ARCH(2) está definido por estas dos ecuaciones:

$$y_t = c + \epsilon_t \qquad \text{(media)}$$

$$\epsilon_t = u_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\epsilon_{t-2}^2} \qquad \text{(varianza)}$$

donde $u_t \sim N(0,1)$, $\alpha_i > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

- A continuación estudiamos los momentos condicionales y no condicionales del término de error ϵ_t.
- Luego vemos los momentos de la variable y_t.

Momentos del término de error

- La media incondicional del término de error es cero:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\epsilon_t &= \mathbb{E}\left[u_t\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2+\alpha_2\epsilon_{t-2}^2}\right]\\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left[u_t\right]}_{=0}\mathbb{E}\left[\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2+\alpha_2\epsilon_{t-2}^2}\right] = 0\end{aligned}$$

- De manera similar, la media condicional también es cero:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\epsilon_t|\Omega_{t-1}\right] &= \mathbb{E}\left[u_t\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2+\alpha_2\epsilon_{t-2}^2}\,\middle|\Omega_{t-1}\right]\\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left[u_t\;|\Omega_{t-1}\right]}_{=0}\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2+\alpha_2\epsilon_{t-2}^2} = 0\end{aligned}$$

- Elevando al cuadrado la ecuación de la varianza es fácil calcular la varianza no condicional del error ϵ:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_t^2 &= u_t^2\left(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\epsilon_{t-2}^2\right) \\
\mathbb{E}\,\epsilon_t^2 &= \mathbb{E}\left[u_t^2\left(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\epsilon_{t-2}^2\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left(u_t^2\right)\mathbb{E}\left(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\epsilon_{t-2}^2\right) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left(u_t^2\right)}_{=1}\left(\alpha_0 + \alpha_1\underbrace{\mathbb{E}\,\epsilon_{t-1}^2}_{=\mathbb{E}\,\epsilon_t^2} + \alpha_2\underbrace{\mathbb{E}\,\epsilon_{t-2}^2}_{=\mathbb{E}\,\epsilon_t^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{Var}(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}
$$

- De manera similar, la varianza condicional en la información disponible a $t-1$ es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\epsilon_t^2|\Omega_{t-1}\right] &= \mathbb{E}\left[u_t^2\left(\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2\right)|\Omega_{t-1}\right]\\ &= \left(\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2+\alpha_2\epsilon_{t-2}^2\right)\underbrace{\mathbb{E}\left[u_t^2|\Omega_{t-1}\right]}_{=1}\end{aligned}$$

- Por lo tanto:

$$\operatorname{Var}\left[\epsilon_t|\Omega_{t-1}\right]=\alpha_0+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2+\alpha_2\epsilon_{t-2}^2$$

- Como $y_t = c + \epsilon_t$, vemos que las varianzas (condicional e incondicional) de y_t son iguales a las de ϵ_t.
- Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} y_t &= \operatorname{Var} \epsilon_t \\
&= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(y_t \mid \Omega_{t-1}\right) &= \operatorname{Var}\left(\epsilon_t \mid \Omega_{t-1}\right) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 3:

Simulando un modelo ARCH(2)

arch-simulaciones.do

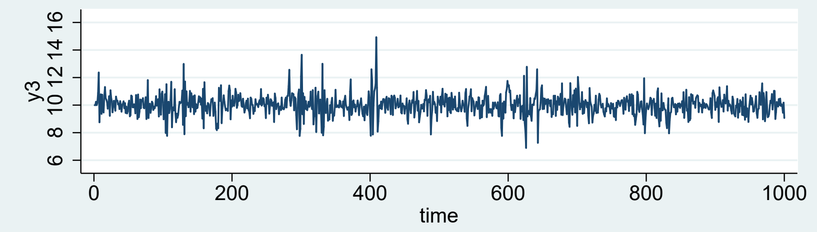
Este código genera una realización del modelo

$$y_t = 1 + 0.9y_{t-1} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t = u_t\sqrt{0.4 + 0.5\epsilon^2_{t-1}}$$

```
local c = 10
local alpha0 = 0.2
local alpha1 = 0.3
local alpha2 = 0.4
gen ez = 0

replace ez = u*(`alpha0' + `alpha1'*(L.ez^2) + `alpha2'*(L.
    ez^2))^(1/2) in 2/L

gen z = `c' + ez
tsline z
```



Para estimar el modelo

```
arch z, arch(1/2)
```

```
ARCH family regression

Sample: 1 - 1000                        Number of obs     =      1,000
Distribution: Gaussian                  Wald chi2(.)      =          .
Log likelihood = -992.1954              Prob > chi2       =          .

------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
           z |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|
-------------+----------------------------------------------------
z            |
       _cons |   9.993861   .0170434    586.38   0.000
-------------+----------------------------------------------------
ARCH         |
        arch |
         L1. |    .658891   .0656346     10.04   0.000
         L2. |   .0187866   .0271173      0.69   0.488
             |
       _cons |   .2137528   .0171361     12.47   0.000
------------------------------------------------------------------
```

El modelo ARCH(q)

ARCH(q)

El modelo ARCH(q) está definido por estas dos ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
y_t &= c + \epsilon_t && \text{(media)} \\
\epsilon_t &= u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2} && \text{(varianza)}
\end{aligned}
$$

- Para que la varianza sea estacionaria, se requiere que
  - $-1 < \alpha_i < 1$
  - $\sum_{i=1}^{1} \alpha_i < 1$

- En el caso del proceso ARCH(q), la varianza condicional es

$$\mathrm{Var}\left(y_t \left| \Omega_{t-1}\right.\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2$$

- mientas que la varianza incondicional es

$$\mathrm{Var}\left(y_t\right) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_q}$$

Determinando si los datos presentan ARCH

- ¿Cómo sabemos si los datos exhiben ARCH?
- Los cuadrados de los residuos son una estimación de la varianza, así que una forma de diagnosticar ARCH es estudiar la autocorrelación de los cuadrados de los residuos.
- Estudiaremos dos pruebas:
  1. La prueba de Ljung-Box
  2. La pueba de Engle basada en el multiplicador de Lagrange
- Ambas pruebas empiezan con los mismos dos pasos
  1. Se estima la ecuación de la media: se hace una regresión de y_t sobre sus rezagos o variables exógenas x_t
  2. Se investiga las propiedades de los residuos y de los cuadrados de los residuos

La prueba Q de Ljung-Box

- Recordemos que esta prueba sirve para determinar si una variable es ruido blanco.
- Se basa en la suma de los cuadrados de los primeros m coeficientes de autocorrelación, la cual debe ser "pequeña" si $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_m = 0$
- En este caso, calculamos el estadístico

$$Q = T(T+2)\sum_{j=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j} \overset{\text{asy}}{\sim} \chi^2_{m-k}$$

  a partir de las autocorrelaciones de los cuadrados de los residuos.
- En la fórmula, T es el número de observaciones (de la regresión, no de la serie original) y k el número de parámetros estimados en esa regresión (sin contar el intercepto).

- Se estima una ecuación AR(m) para los residuos al cuadrado:

$$\hat{\epsilon}_t^2 = \hat{a}_0 + a_1\hat{\epsilon}_{t-1}^2 + a_2\hat{\epsilon}_{t-2}^2 + \cdots + a_m\hat{\epsilon}_{t-m}^2 + v_t$$

Test de Engel (1982)

	¿Hay efectos ARCH en la serie de tiempo y_t?
H_0	$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$ (no hay ARCH)
Test	$\lambda = T'R^2 \overset{\text{asy}}{\sim} \chi^2_m$
	Si $\lambda > \chi^2_{m-k}(1-\alpha)$, rechazar H_0 con $100\alpha\%$ de significancia: la serie sí tiene efectos ARCH.

Encontrando el óptimo número de rezagos

- Tanto en la prueba de Ljung-Box como en la de Engel asumimos que conocíamos el orden m del proceso ARCH(m)
- En la práctica, eso no es así.
- Para determinar el valor de m, recurrimos de nuevo a los criterios de información:
  - criterio de información de Akaike
  - criterio de información bayesiano
- Escogemos el valor m que minimice estos criterios.
- ¿Y si no se pone de acuerdo? en tal caso el bayesiano escogerá un valor menor que el de Akaike:
  - usamos el bayesiano si preferimos una especificación más parsimoniosa,
  - usamos Akaike si nos preocupa incurrir en sesgo de variable omitida.

Estimando modelos ARCH

- En general, la ecuación de varianza de los modelos ARCH se pueden escribir como $\epsilon_t = u_t\sqrt{h_t}$, en los cuales siempre se asume que

$$\mathbb{E}\, u_t = 0 \qquad \operatorname{Var} u_t = 1 \qquad \operatorname{Cov}(u_t, u_{t-j}) = 0$$

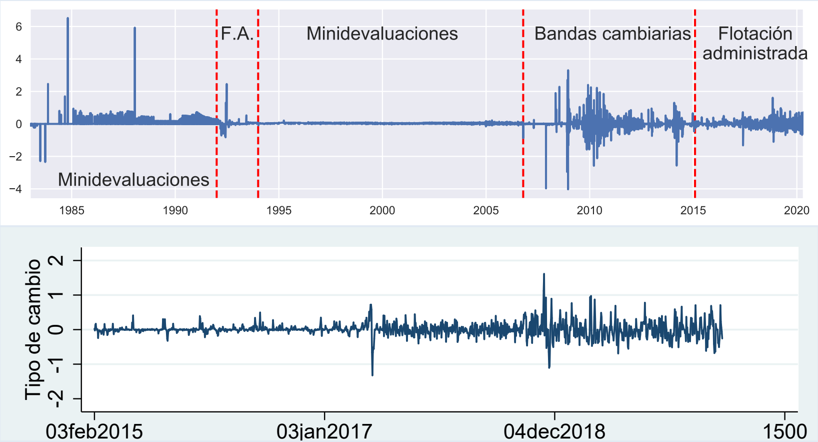
- Hay varios métodos para estimar estos modelos:
  - el método de máxima verosimilitud,
  - el método de cuasi-máxima verosimilitud,
  - el método generalizado de momentos.
- Además, las estimaciones de máxima verosimilitud pueden asumir distintas distribuciones del ruido blanco u_t.

Ejemplo 4:

Un modelo ARCH del tipo de cambio del colón/dólar

- `tipo-cambio.csv`

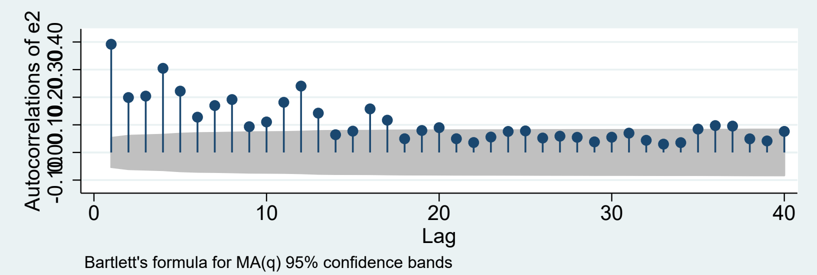
- `arch-tipo-cambio.do`


F.A.
Minidevaluaciones
Bandas cambiarias
Flotación administrada
Minidevaluaciones
6
4
2
0
−2
−4
1985
1990
1995
2000
2005
2010
2015
2020
Tipo de cambio
2
1
0
-1
-2
03feb2015
03jan2017
04dec2018
1500

Calculamos los cuadrados de los residuos de la ecuación de la media:

```
quietly regress tc
predict e, resid
gen e2 = e^2

ac e2 /* autocorrelograma*/
```



Sin importar cuántos rezagos usamos, la prueba del multiplicador de lagrange nos dice que sí hay efectos ARCH.

```
estat archlm, lags(1/12)
```

```
LM test for autoregressive conditional heteroskedasticity (
    ARCH)
---------------------------------------------------------
 lags(p)  |      chi2        df       Prob > chi2
----------+----------------------------------------------
     1    |   209.419         1          0.0000
     2    |   212.541         2          0.0000
     3    |   231.625         3          0.0000
     4    |   283.783         4          0.0000
     5    |   284.577         5          0.0000
     6    |   284.471         6          0.0000
     7    |   291.968         7          0.0000
     8    |   293.769         8          0.0000
     9    |   298.060         9          0.0000
    10    |   301.888        10          0.0000
    11    |   310.374        11          0.0000
    12    |   322.986        12          0.0000
---------------------------------------------------------
H0: no ARCH effects  vs.  H1: ARCH(p) disturbance
```

Los criterios de Akaike y el bayesiano coiciden en especificar un modelo ARCH(10).

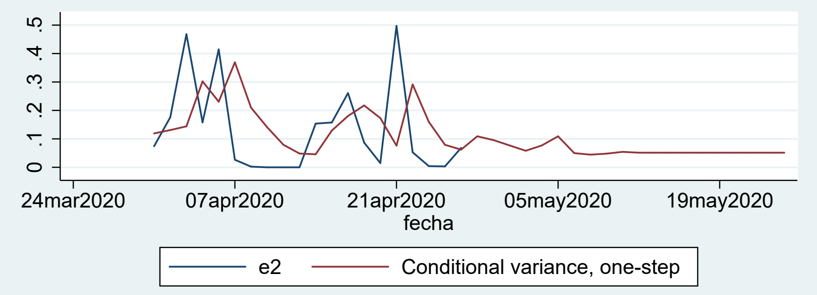
```
forvalues lags=1/11{
 quietly arch tc, arch(1/`lags')
 quietly estat ic
 matrix temp = r(S)
 display "lags=" `lags' " AIC=" temp[1,5] " BIC
     =" temp[1,6]
}
```

lags = 1	AIC = −990.60684	BIC = −974.95011
lags = 2	AIC = −1218.8708	BIC = −1197.9952
lags = 3	AIC = −1276.3479	BIC = −1250.2534
lags = 4	AIC = −1315.5608	BIC = −1284.2473
lags = 5	AIC = −1361.0546	BIC = −1324.5222
lags = 6	AIC = −1378.8952	BIC = −1337.144
lags = 7	AIC = −1378.8461	BIC = −1331.8759
lags = 8	AIC = −1381.6959	BIC = −1329.5068
lags = 9	AIC = −1401.3779	BIC = −1343.9699
lags = 10	AIC = −1420.0086	BIC = −1357.3817
lags = 11	AIC = −1418.071	BIC = −1350.2252

Estimamos el modelo ARCH con el número óptimo de rezagos y pronosticamos la varianza del siguiente mes:

```
arch tc, arch(1/10)
tsappend, add(20)  /* ampliamos la muestra*/

predict varhat, variance /* pronóstico */
tsline e2 varhat in -40/l
```



3. El modelo GARCH

De ARCH a GARCH

1. Los modelos ARCH pueden capturar muchas de las características de datos financieros, pero para lograrlo pueden necesitar muchos rezagos en la ecuación de varianza.
2. En 1986 Bollerslev encontró una solución a este problema via una generalización del modelo ARCH.
3. Un modelo GARCH(p,q) puede reflejar un ARCH(∞) usando pocos parámetros.

- Antes de generalizar el modelo ARCH(q), rescribamos la ecuación de la varianza así

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= u_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q\epsilon_{t-q}^2} = \sigma_t u_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q\epsilon_{t-q}^2 \end{aligned}$$

- Vemos que la varianza condicional σ_t^2 de un modelo ARCH(q) es similar a un proceso MA(q).
- El modelo GARCH(p,q) se obtiene agregando p rezagos de la varianza condicional al proceso ARCH(q):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q\epsilon_{t-q}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p\sigma_{t-p}^2$$

El modelo GARCH(1,1)

GARCH(1,1)

El modelo GARCH(1,1) está definido por estas tres ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
y_t &= c + \epsilon_t \\
\epsilon_t &= u_t \sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

- Notemos lo parecida que es esta formulación de la varianza condicional a un proceso ARMA(1,1).

- Podemos escribirla así la varianza condicional

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \\
\sigma_t^2 - \beta\sigma_{t-1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 \\
\left(1 - \beta\,\mathrm{L}\right)\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 \\
\sigma_t^2 &= \left(1 - \beta\,\mathrm{L}\right)^{-1}\left(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2\right) \\
&= \frac{\alpha_0}{1-\beta} + \left(1 + \beta\,\mathrm{L} + \beta^2\,\mathrm{L}^2 + \dots\right)\alpha_1\epsilon_{t-1}^2 \\
&= \frac{\alpha_0}{1-\beta} + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_1\beta\epsilon_{t-2}^2 + \alpha_1\beta^2\epsilon_{t-3}^2 + \dots
\end{aligned}
$$

  siempre y cuando $|\beta| < 1$.
- Vemos que el proceso GARCH(1,1) es equivalente a un proceso ARCH(∞).
- Esto permite al GARCH capturar procesos muy complejos sin necesidad de estimar muchísimos parámetros.

Ejemplo 5:

Simulando un modelo GARCH(1,1)

arch-simulaciones.do

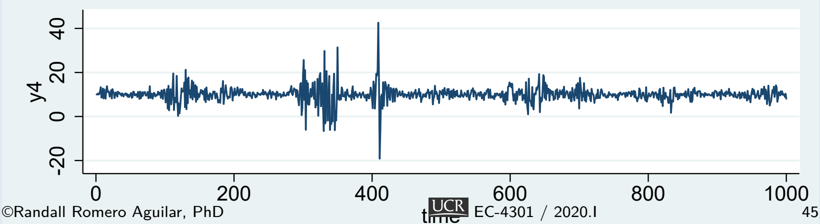
Este código genera una realización del modelo

$$y_t = 10 + \epsilon_t \qquad \epsilon_t = u_t\sigma_t \qquad \sigma_t^2 = 0.2 + 0.4\epsilon_{t-1}^2 + 0.6\sigma_{t-1}^2$$

```
local c = 10
local alpha0 = 0.2
local alpha1 = 0.4
local beta1 = 0.6
gen ew = 0
gen sigma2 = 1

forvalues i=2/`=_N'{
 replace sigma2 = `alpha0' + `alpha1'*(L.ew^2) + `beta1'*(L
      .sigma2) in `i'
 replace ew = u*sqrt(sigma2) in `i'
}

gen w = `c' + ew
tsline w
```



Para estimar el modelo

```
arch w, arch(1) garch(1)
```

```
ARCH family regression

Sample: 1 - 1000                        Number of obs     =      1,000
Distribution: Gaussian                  Wald chi2(.)      =          .
Log likelihood = -2106.886              Prob > chi2       =          .

------------------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
           w |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|
-------------+----------------------------------------------------------------
w            |
       _cons |   9.971864   .0446534   223.32   0.000
-------------+----------------------------------------------------------------
ARCH         |
        arch |
         L1. |   .3949275   .0446639     8.84   0.000
             |
       garch |
         L1. |   .6291797   .0317643    19.81   0.000
             |
       _cons |   .1593738   .0421826     3.78   0.000
------------------------------------------------------------------------------
```

El modelo GARCH(p,q)

GARCH(p,q)

El modelo GARCH(p,q) está definido por estas tres ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
y_t &= c + \epsilon_t \\
\epsilon_t &= u_t \sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2
\end{aligned}
$$

- En la práctica, es inusual requerir más de dos rezagos ARCH y GARCH (i.e., $p \leq 2$ y $q \leq 2$).

Ejemplo 6:

Un modelo GARCH del tipo de cambio del colón/dólar

- `tipo-cambio.csv`

- `arch-tipo-cambio.do`

Los criterios de Akaike y el bayesiano coiciden en especificar un modelo GARCH(2,3).

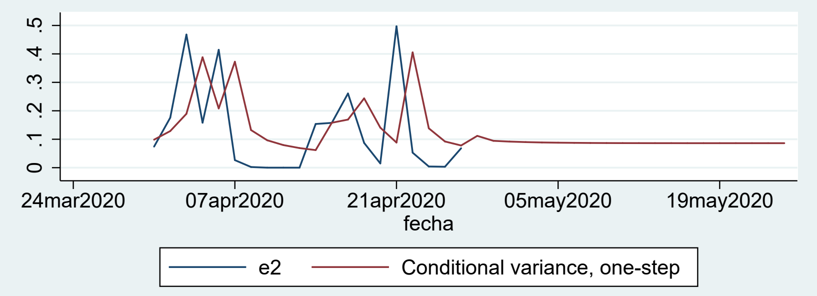
```
forvalues p=0/2{
forvalues q=1/4{
  if `p'==0{
    quietly arch tc, arch(1/`q')
  }
  else {
    quietly arch tc, arch(1/`q') garch(1/`p')
  }
  quietly estat ic
  matrix temp = r(S)
  display "p = " `p' " q = " `q' " AIC = " temp
      [1,5] " BIC = " temp[1,6]
}
}
```

```
p = 0 q = 1 AIC = −990.60684 BIC = −974.95011
p = 0 q = 2 AIC = −1218.8708 BIC = −1197.9952
p = 0 q = 3 AIC = −1276.3479 BIC = −1250.2534
p = 0 q = 4 AIC = −1315.5608 BIC = −1284.2473
p = 1 q = 1 AIC = −1415.7106 BIC = −1394.835
p = 1 q = 2 AIC = −1448.2148 BIC = −1422.1202
p = 1 q = 3 AIC = −1488.5201 BIC = −1457.2067
p = 1 q = 4 AIC = −1489.3458 BIC = −1452.8134
p = 2 q = 1 AIC = −1424.5417 BIC = −1398.4472
p = 2 q = 2 AIC = −1493.9636 BIC = −1462.6502
p = 2 q = 3 AIC = −1500.0086 BIC = −1463.4762
p = 2 q = 4 AIC = −1459.4402 BIC = −1417.6889
```

Estimamos el modelo GARCH con el número óptimo de rezagos y pronosticamos la varianza del siguiente mes:

```
arch tc, arch(1/3) garch(1/2)

predict varhat2, variance
tsline e2 varhat2 in -40/l
```



Aunque no mostramos más detalles acá, podemos también estimar modelos AR-GARCH. Por ejemplo este modelo AR(1)-GARCH(2,2) del tipo de cambio

```
arch tc L.tc, arch(1/2) garch(1/2)
```

```
Sample: 04feb2015 - 25apr2020  Number of obs   =   1,364
 Distribution: Gaussian         Wald chi2(1)    =   96.45
Log likelihood =   791.6779     Prob > chi2     =  0.0000
--------------------------------------------------------------
          tc |     Coef.    Std. Err.       z      P>|z|
-------------+------------------------------------------------
       L1.tc |    .31708    .0322866     9.82     0.000
       _cons |  .0020962    .0028756     0.73     0.466
-------------+------------------------------------------------
ARCH         |
     L1.arch |  .4853867    .0299791    16.19     0.000
     L2.arch | -.4833929    .0299363   -16.15     0.000
    L1.garch |  1.453636    .0334281    43.49     0.000
    L2.garch |  -.454845     .033364   -13.63     0.000
       _cons | -1.84e-06    1.41e-06    -1.31     0.192
--------------------------------------------------------------
```

4. Variantes del modelo GARCH

Variantes del modelo GARCH

- A la fecha se ha realizado mucha investigación para mejorar la capacidad de ajuste de los modelos GARCH.
- Las mejoras se logran principalmente cambiando las restricciones sobre los parámetros del modelo.
- Existen muchísimas variantes del modelo GARCH, entre ellas:
  - GARCH-t, que asume que el ruido blanco sigue una distribución t-Student en vez de una normal estándar.
  - GARCH-M, que incluye la varianza como una variable explicativa de la media.
  - GJR-GARCH, E-GARCH, T-GARCH, para modelar respuestas asimétricas a los shocks.
  - I-GARCH, para procesos que tienen una varianza con raíz unitaria.

El modelo GARCH-M

- En finanzas se tiene por hecho que mayores riesgos solo se asumen si se esperan mayores retornos.
- Esto sugiere una modificación del modelo GARCH: incluir la varianza del proceso en la ecuación del retorno esperado.
- Así, por ejemplo, puede especificarse el modelo

$$
\begin{aligned}
y_t &= c + \gamma x_t + \lambda \sigma_t + \epsilon_t \\
\epsilon_t &= \sigma_t u_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

- Este modelo puede generalizarse aún más, incluyendo además rezagos de la varianza en la ecuación de y_t.

Referencias I

Enders, Walter (2014). *Applied Econometric Time Series*. 4ª ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-80856-6.

Hamilton, James M. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. ISBN: 0-691-04289-6.

Levendis, John D. (2018). *Time Series Econometrics. Learning Through Replication*. Springer. ISBN: 978-3-319-98281-6.