

Ecuaciones en diferencia

Randall Romero Aguilar, PhD

randall.romero@ucr.ac.cr

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 3 de abril de 2020



Tabla de contenidos

1. Solución por sustituciones recursivas
2. Solución por combinación de soluciones homogéneas y particulares
3. Solución por medio del operador de rezagos

- ▶ Este tema constituye el primer paso para el estudio de la econometría de series de tiempo
- ▶ En esta presentación, se asumirá que todas las variables son determinísticas (no estocásticas).
- ▶ El interés de esta presentación es el estudio de las consecuencias **dinámicas** de eventos a través del **tiempo**.
- ▶ Se limita la exposición a ecuaciones en diferencia lineales.

Ecuación en diferencia lineal de orden p

- ▶ La variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de orden p cuando depende de sus últimos p valores

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- ▶ Si $w_t = 0$ en todo período t , obtenemos la ecuación en diferencia lineal homogénea

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = 0$$

- ▶ Nuestra meta es responder a: ¿cuál es el efecto sobre la trayectoria de y de un cambio en w ?

Ecuación en diferencia de primer orden

- ▶ Si $p = 1$, la variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de primer orden

$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$$

- ▶ En este caso, la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_t - \phi y_{t-1} = 0$$

1. Solución por sustituciones recursivas

Solución de la ecuación de primer orden

- Dado un valor inicial y_{-1} y la secuencia

$$\{w_0, w_1, \dots, w_t\}$$

la ecuación puede resolverse de manera recursiva como:

$$y_t = \phi^{t+1}y_{-1} + \phi^t w_0 + \phi^{t-1}w_1 + \dots + \phi w_{t-1} + w_t$$

Multiplicador dinámico: shock transitorio

- ▶ La solución es similar si se desea expresar y_{t+j} a partir de y_t

$$y_{t+j} = \phi^{j+1}y_{t-1} + \phi^j w_t + \phi^{j-1}w_{t+1} + \cdots + \phi w_{t+j-1} + w_{t+j}$$

- ▶ El multiplicador dinámico se obtiene simplemente como:

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \phi^j$$

- ▶ El proceso es estable si y sólo si $|\phi| < 1$

- ▶ Sea β el factor de descuento. Se define el valor presente:

$$VP = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t+j}$$

- ▶ ¿Cuál es el efecto de un cambio en w_t sobre el VP de y ?

$$\frac{\partial VP}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \phi^j = \frac{1}{1 - \beta\phi}$$

siempre y cuando $|\beta\phi| < 1$.

Efecto de un shock permanente

- ▶ Supóngase que el cambio en w_t es permanente.
- ▶ ¿Qué efecto tiene sobre y en el largo plazo?

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^j \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_{t+k}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^j \phi^{j-k} = \frac{1}{1-\phi}$$

siempre y cuando $|\phi| < 1$.

Efecto acumulado de un shock transitorio

- ▶ Se desea la suma de los cambios en y como consecuencia de un único cambio en w_t .
- ▶ Esto corresponde al ejemplo del VP cuando $\beta = 1$:

$$EA = \sum_{j=0}^{\infty} 1^j \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j = \frac{1}{1-\phi}, \quad |\phi| < 1.$$

Nótese que el efecto acumulado de un shock transitorio es igual al efecto de un shock permanente en el largo plazo.

Ecuación en diferencia de orden p

- ▶ La variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de primer orden cuando depende de sus últimos p valores

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- ▶ Es muy complicado analizar por sustitución recursiva la dinámica de una ecuación de orden p .
- ▶ Afortunadamente es muy simple expresarla como una ecuación vectorial en diferencia de orden 1, que se resuelve de manera similar a la ecuación escalar.

Solución de la ecuación de orden p

Para resolverla se definen:

$$\xi_t \equiv \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}, \quad F \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \dots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_t \equiv \begin{bmatrix} w_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

con lo que la ecuación de orden p que puede escribirse:

$$\xi_t = F\xi_{t-1} + v_t$$

y resolverse como:

$$\xi_{t+j} = F^{j+1}\xi_{t-1} + F^j v_t + F^{j-1}v_{t+1} + \dots + Fv_{t+j-1} + v_{t+j}$$

Nota:

Descomposición espectral de una
matriz

Descomposición espectral de una matriz

Si los eigenvectores de la matriz cuadrada A son linealmente independientes, entonces

$$A = C\Lambda C^{-1}$$

donde Λ es la matriz diagonal formada por los eigenvalores de A :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

y las columnas de C son los correspondientes eigenvectores de A .

Si A tiene la descomposición espectral $A = C\Lambda C^{-1}$ es fácil calcular su t -ésima potencia:

$$A^t = C\Lambda^t C^{-1}$$

ya que

$$\Lambda^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1:

Resolviendo

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$$

La ecuación puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ξ_t F ξ_{t-1} v

Por sustitución recursiva encontramos

$$\begin{aligned} \xi_t &= (I + F + F^2 + \cdots + F^{t-2}) v + F^{t-1} \xi_1 \\ &= (I - F)^{-1} (I - F) (I + F + F^2 + \cdots + F^{t-2}) v + F^{t-1} \xi_1 \\ &= (I - F)^{-1} (I - F^{t-1}) v + F^{t-1} \xi_1 \end{aligned}$$

Necesitamos una expresión para F^{t-1} . Para ello, buscamos la descomposición espectral de F .

Encontramos los eigenvalores de F :

$$\begin{vmatrix} 0.9 - \lambda & -0.2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.2 = (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.4) = 0$$

es decir, $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.4$.

Es fácil mostrar que los eigenvectores son $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Entonces

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \\ F^{t-1} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{t-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{t-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^t - \lambda_2^t & -\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^{t-1} - \lambda_2^{t-1}) \\ \lambda_1^{t-1} - \lambda_2^{t-1} & -\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^{t-2} - \lambda_2^{t-2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de λ_1 y λ_2

$$F^{t-1} = \begin{bmatrix} 10(0.5^t - 0.4^t) & -2(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) \\ 10(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) & -2(0.5^{t-2} - 0.4^{t-2}) \end{bmatrix}$$

Por otra parte:

$$(I - F)^{-1} = \frac{10}{3} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación vectorial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-10(0.5^t-0.4^t) & 2(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) \\ -10(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) & 1-2(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 10(0.5^t-0.4^t) & -2(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) \\ 10(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) & -2(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-10(0.5^t-0.4^t) \\ -10(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} 10(0.5^t-0.4^t) & -2(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) \\ 10(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) & -2(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tomando la primera fila

$$y_t = 10 - 100 (0.5^t - 0.4^t) + 20 (0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) + \\ 10y_1 (0.5^t - 0.4^t) - 2y_0 (0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) \Rightarrow$$

$$y_t = 10 + 10 (y_1 - 10) (0.5^t - 0.4^t) - 2 (y_0 - 10) (0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) \\ = 10 + (10y_1 - 100) (0.5^t - 0.4^t) + (20 - 2y_0) (2 \times 0.5^t - 2.5 \times 0.4^t) \\ = 10 + (10y_1 - 4y_0 - 60) 0.5^t - (10y_1 - 5y_0 - 50) 0.4^t$$

Si imponemos las 2 condiciones iniciales: $y_0 = 13, y_1 = 11.3$, la solución de la ecuación es:

$$y_t = 10 + 0.5^t + 2 \times 0.4^t$$

Multiplicador dinámico: caso orden p

- ▶ De nuevo el multiplicador dinámico se obtiene por derivación:

$$\frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v'_t} = F^j$$

- ▶ El primer elemento de ξ_{t+j} es y_{t+j} y el primer elemento de v_t es w_t , por lo tanto:

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = F^j_{(11)}$$

- ▶ Ahora la estabilidad depende de F^j .

- ▶ Que F^j tienda a 0 cuando j crece al infinito depende de los eigenvalores de F .
- ▶ Si todos son distintos, entonces $F^j = T \Lambda^j T^{-1}$, donde:

$$F^j = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{p1} & t_{p2} & \dots & t_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{11} & t^{12} & \dots & t^{1p} \\ t^{21} & t^{22} & \dots & t^{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{p1} & t^{p2} & \dots & t^{pp} \end{bmatrix}$$

- ▶ por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} &= F_{(11)}^j = (t_{11}t^{11}) \lambda_1^j + (t_{12}t^{21}) \lambda_2^j + \dots + (t_{1p}t^{p1}) \lambda_p^j \\ &= c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j + \dots + c_p \lambda_p^j \end{aligned}$$

Obteniendo los eigenvalores y los ponderadores

- ▶ Los eigenvalores de F se obtienen de resolver:

Ecuación característica

$$|F - \lambda I_p| = \lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \dots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p = 0$$

- ▶ Mientras que c_i se obtiene de:

$$c_i = \frac{\lambda_i^{p-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p (\lambda_i - \lambda_k)}$$

- ▶ Nótese que:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_p = (t_{11}t^{11}) + (t_{12}t^{21}) + \dots + (t_{1p}t^{p1}) = 1$$

- ▶ Dado que

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j + \cdots + c_p \lambda_p^j$$
$$1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_p$$

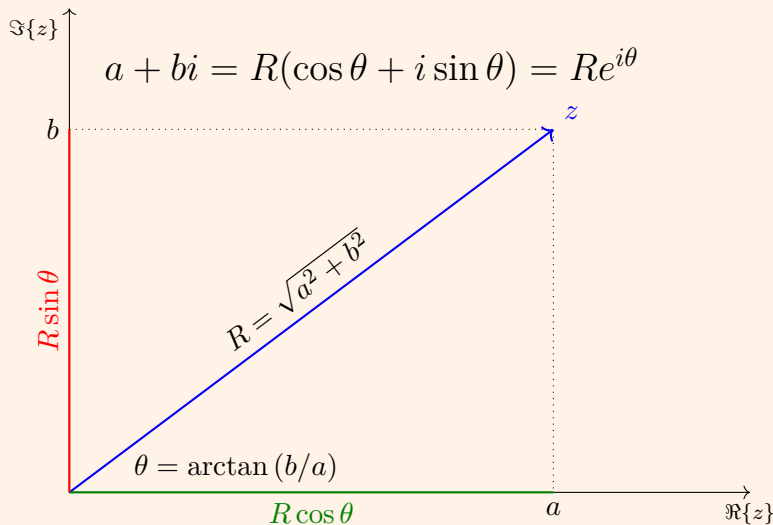
el multiplicador dinámico es un promedio ponderado de las potencias de los eigenvalores.

- ▶ La forma del ajuste dependerá del eigenvalor de mayor valor absoluto λ_{max}
 - ▶ Si $0 < \lambda_{max} < 1$, el MD decae geométricamente.
 - ▶ Si $-1 < \lambda_{max} < 0$, el MD decae alternando
 - ▶ Si $|\lambda_{max}| > 1$, la serie explota (no converge)

Nota:

Números complejos

Representación de números complejos



Multiplicación de números complejos

- ▶ Si $z = Re^{i\theta}$ y $w = Se^{i\varphi}$, entonces su producto es

$$zw = RSe^{i(\theta+\varphi)}$$

- ▶ Así, si elevamos z a la n -ésima potencia:

$$z^n = \left(Re^{i\theta}\right)^n = R^n e^{in\theta}$$

- ▶ Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0 \Leftrightarrow |R| < 1$$

Figura: Ejemplos de potencia de números complejos

Dinámica de ajuste (2)

- ▶ ¿Cómo se da el ajuste si λ_{max} es complejo?
- ▶ Se sabe que si $\lambda_1 = a + bi$, entonces $\lambda_2 = a - bi$
- ▶ Si expresamos λ_j en coordenadas polares:

$$\lambda_1 = R[\cos \theta + i \sin \theta] = Re^{i\theta}$$

$$\lambda_2 = R[\cos \theta - i \sin \theta] = Re^{-i\theta}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = R \cos \theta$$

$$b = R \sin \theta$$

- ▶ De lo anterior:

$$\lambda_1^j = R^j e^{ij\theta} = R^j [\cos j\theta + i \sin j\theta]$$

$$\lambda_2^j = R^j e^{-ij\theta} = R^j [\cos j\theta - i \sin j\theta]$$

- El promedio de estos dos eigenvalores es:

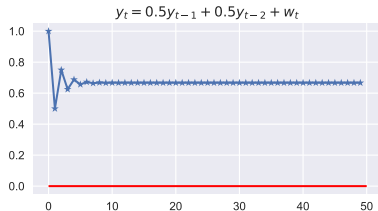
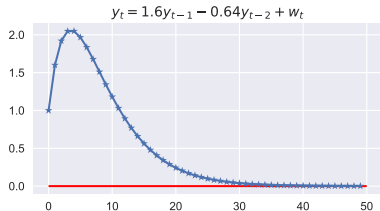
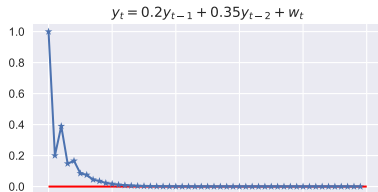
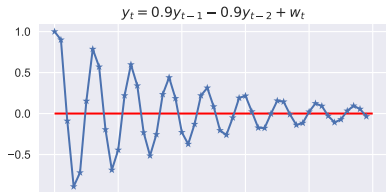
$$\begin{aligned}c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j &= c_1 R^j [\cos j\theta + i \sin j\theta] + c_2 R^j [\cos j\theta - i \sin j\theta] \\&= R^j [(c_1 + c_2) \cos j\theta + i(c_1 - c_2) \sin j\theta]\end{aligned}$$

Pero c_1 y c_2 son conjugados: $c_1, c_2 = \alpha \pm \beta i$

$$= R^j [2\alpha \cos j\theta - 2\beta \sin j\theta]$$

- que en función de j es periódica, con frecuencia θ y período $\frac{2\pi}{\theta}$

Ejemplo de dinámica de ajuste cuando $p = 2$



- Recordando que

$$\frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v'_t} = F^j$$

Se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v'_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j F^j = (I_p - \beta F)^{-1}$$

En este caso su elemento 1,1 es

$$\frac{1}{1 - \phi_1 \beta - \phi_2 \beta^2 - \dots - \phi_p \beta^p}$$

- ▶ Se obtiene del VP en el caso particular en que $\beta = 1$:

$$\frac{1}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}$$

2. Solución por combinación de soluciones homogéneas y particulares

La estrategia de solución

Para resolver la ecuación lineal en diferencia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

seguimos estos pasos

Paso 1: Formamos la ecuación homogénea

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = 0 \text{ y}$$

encontramos sus p soluciones;

Paso 2: Encontramos una solución particular;

Paso 3: Obtenemos la solución general como la suma de la solución particular y una combinación lineal de todas las soluciones homogéneas;

Paso 4: Eliminamos las constantes arbitrarias imponiendo p condiciones iniciales en el problema.

Ecuación homogénea de primer orden

- Para la ecuación

$$y_t = \phi y_{t-1} \Rightarrow y_t - \phi y_{t-1} = 0$$

- Solución trivial: $y_t = y_{t-1} = \dots = 0$, pero no es única.
- La expresión $y_t^h = \phi^t$ también es una solución:

$$\underbrace{\phi^t}_{y_t^h} - \phi \left(\underbrace{\phi^{t-1}}_{y_{t-1}^h} \right) = 0$$

- Pero si y_t^h es una solución, entonces Ay_t^h también lo es, para cualquier escalar A :

$$Ay_t^h - \phi \left(Ay_{t-1}^h \right) = A \left(y_t^h - \phi y_{t-1}^h \right) = 0$$

Condición inicial para la ecuación homogénea de primer orden

- ▶ Hemos obtenido que $y_t = A\phi^t$ resuelve $y_t - \phi y_{t-1} = 0$
- ▶ Para determinar un valor específico de A , necesitamos una condición inicial.
- ▶ Por ejemplo, supongamos que el valor de y_t en $t = 0$ es conocido. Entonces:

$$y_0 = A\phi^0 \quad \Rightarrow \quad A = y_0$$

- ▶ Por lo que en ese caso la solución de la ecuación sería

$$y_t = \phi^t y_0$$

Ecuación homogénea de orden p

- Para la ecuación

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_{p-1} y_{t-p+1} - \phi_p y_{t-p} = 0$$

- Solución trivial es de nuevo: $y_t = y_{t-1} = \cdots = 0$.
- Supongamos que la expresión $y_t^h = z^t$ también es una solución. Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned} z^t - \phi_1 z^{t-1} - \phi_2 z^{t-2} - \cdots - \phi_{p-1} z^{t-p+1} - \phi_p z^{t-p} &= 0 \\ z^{t-p} [z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1} z^1 - \phi_p z^0] &= 0 \end{aligned}$$

- Hemos logrado cambiar el problema original por el de encontrar los ceros de un polinomio de grado p :

$$z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1} z - \phi_p = 0$$

- Esta es la misma ecuación característica que encontramos en la sección anterior.

Resolviendo la ecuación característica

- ▶ Todo polinomio de grado p tiene exactamente p raíces, no necesariamente distintas o reales.
- ▶ Supongamos que z_1, z_2, \dots, z_p son las raíces del polinomio.
- ▶ Las soluciones homogéneas son entonces

$$y_t^h \in \{z_1^t, z_2^t, \dots, z_p^t\}$$

- ▶ Cualquier combinación lineal de estas soluciones $y_t^h = A_1 z_1^t + \dots + A_p z_p^t$ también es una solución:

$$\begin{aligned} y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} &= (A_1 z_1^t + \dots + A_p z_p^t) - \\ &\phi_1 (A_1 z_1^{t-1} + \dots + A_p z_p^{t-1}) - \dots - \phi_p (A_1 z_1^{t-p} + \dots + A_1 z_p^{t-p}) = \\ A_1 (z_1^t - \phi_1 z_1^{t-1} - \dots - \phi_p z_1^{t-p}) + \dots + A_p (z_p^t - \phi_1 z_p^{t-1} - \dots - \phi_p z_p^{t-p}) &= \\ A_1 z_1^{t-p} (z_1^p - \phi_1 z_1^{p-1} - \dots - \phi_p) + \dots + A_p z_p^{t-p} (z_p^p - \phi_1 z_p^{p-1} - \dots - \phi_p) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Resolviendo

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$$



EqDiff2.ipynb

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$$

Paso 1: Resolvemos la ecuación homogénea

$$y_t - 0.9y_{t-1} + 0.2y_{t-2} = 0:$$

$$z^2 - 0.9z + 0.2 = (z - 0.4)(z - 0.5) = 0$$

$$z \in \{0.4, 0.5\} \Rightarrow y_{1,t}^h = 0.4^t, y_{2,t}^h = 0.5^t$$

Es fácil verificar que son las soluciones:

$$0.4^t - 0.9(0.4)^{t-1} + 0.2(0.4)^{t-2} = (0.4)^{t-2} [(0.4)^2 - 0.9(0.4) + 0.2] = 0$$

$$0.5^t - 0.9(0.5)^{t-1} + 0.2(0.5)^{t-2} = (0.5)^{t-2} [(0.5)^2 - 0.9(0.5) + 0.2] = 0$$

Paso 2: Supongamos que $y_t^p = c$, una constante, es una solución particular:

$$c = 0.9c - 0.2c + 3 \Rightarrow c = 10 \Rightarrow y_t^p = 10$$

Paso 3: Obtenemos la solución general como la suma de la solución particular y una combinación lineal de todas las soluciones homogéneas:

$$y_t = A_1(0.4)^t + A_2(0.5)^t + 10$$

Paso 4: Eliminamos A_1, A_2 imponiendo 2 condiciones iniciales: $y_0 = 13, y_1 = 11.3$.

$$\begin{cases} 13 &= A_1 + A_2 + 10 \\ 11.3 &= 0.4A_1 + 0.5A_2 + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 &= 3 \\ 0.4A_1 + 0.5A_2 &= 1.3 \end{cases}$$

entonces $A_1 = 2, A_2 = 1$ y la solución general de la ecuación es:

$$y_t = 2(0.4)^t + (0.5)^t + 10$$

Podemos también resolver este sistema utilizando el paquete `sympy` de Python:

```
1 from sympy import Function, rsolve
2 from sympy.abc import t
3
4 y = Function('y')
5 rsolve(y(t) - 0.9*y(t-1) + 0.2*y(t-2) - 3, y(t)
        , {y(0):13, y(1): 11.3})
```

3. Solución por medio del operador de rezagos

- ▶ Este tema constituye una herramienta para simplificar el análisis de ecuaciones en diferencia
- ▶ Se asumirá que todas las variables son determinísticas (no estocásticas).
- ▶ Se limita la exposición a ecuaciones en diferencia lineales.

Ecuación en diferencia de primer orden

- ▶ En este caso

$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$$

- ▶ Utilizando el operador de rezagos se resuelve así:

$$y_t = \phi L y_t + w_t$$

$$(1 - \phi L)y_t = w_t$$

$$(1 + \phi L + \cdots + \phi^t L^t) (1 - \phi L)y_t = (1 + \phi L + \cdots + \phi^t L^t) w_t$$

$$(1 - \phi^{t+1} L^{t+1}) y_t = w_t + \phi w_{t-1} + \cdots + \phi^t w_0$$

- ▶ Así

$$y_t = \phi^{t+1} y_{-1} + w_t + \phi w_{t-1} + \cdots + \phi^t w_0$$

Solución de “largo plazo”

► En este caso

$$(1 - \phi L)y_t = w_t$$

$$(1 - \phi L)^{-1} (1 - \phi L)y_t = (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots) w_t$$

$$y_t = w_t + \phi w_{t-1} + \phi^2 w_{t-2} + \dots$$

siempre y cuando $|\phi| < 1$.

Ecuación en diferencia de orden p

- ▶ La variable y_t evoluciona como

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- ▶ Con operador de rezagos:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) y_t = w_t$$

- ▶ Para factorizar el polinomio es necesario resolver

$$f(z) \equiv 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$$

- ▶ Con el cambio de variable $z = \frac{1}{\lambda}$ obtenemos

$$1 - \phi_1 \left(\frac{1}{\lambda}\right) - \phi_2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \cdots - \phi_p \left(\frac{1}{\lambda}\right)^p = 0$$
$$\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p = 0$$

- ▶ Esta es la misma expresión que se obtuvo con álgebra de matrices: por lo tanto las raíces de $f(z)$ son los **recíprocos** de las raíces anteriores.

- Dada la relación existente entre las ecuaciones

$$\begin{aligned}1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p &= 0 \\ \lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \dots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p &= 0\end{aligned}$$

está claro que para que el proceso sea estable es necesario que las raíces de

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

estén **fuera** del círculo unitario, esto es, si z_i es raíz, entonces $|z_i| > 1$.



Enders, Walter (2014). *Applied Econometric Time Series*. 4^a ed. Wiley.
ISBN: 978-1-118-80856-6.



Hamilton, James M. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. ISBN: 0-691-04289-6.