El modelo de Solow aumentado con capital humano

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC3300 - Crecimiento Económico
II Semestre 2021
Última actualización: 23 de septiembre de 2021

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. Introducción

Aumentando el modelo de Solow-Swan

- Ahora enriqueceremos el modelo de Solow-Swan, cuestionando y debilitando la supuestos de exogeneidad.
- Pasamos a los modelos de crecimiento endógeno.
- Endógeno porque la tasa de crecimiento de las variables impulsoras (por ejemplo, el cambio técnico) son internas al modelo (endógeno).

T.W.Schultz y el capital humano

- T. W. Schultz fue pionero en la idea de capital humano como ”inversión en seres humanos”.
- Curiosamente, la importancia del capital humano se le ocurrió cuando se dio cuenta (finales de la década de 1940) de que los modelos de crecimiento económico no explicaban las diferencias en el ingreso per cápita (en países).
- La visión contemporánea (siguiendo a Marshall) veía el trabajo como un bulto homogéneo, donde sólo importaba la cantidad.
- Schultz reconoció las oportunidades de inversión para aumentar las habilidades y capacidades.
- Por lo tanto, la inversión en las personas es otra forma de capital: capital humano.

El capital humano

- Capital humano es cualquier forma de inversión en personas.
- Importante que el capital está ”incorporado” en la persona.
- Así, el propietario del capital se preocupa por las condiciones laborales.
- Formas de incrementar el capital humano:
  - escolarización
  - programas de entrenamiento
  - experiencia (formación en el trabajo)
  - salud
  - migración (una inversión para dejar un mercado laboral pobre y pasar a un buen mercado laboral).
  - inversiones de los padres en educación temprana

2. El modelo

- En un artículo de 1992 en el Quarterly Journal of Economics, Mankiw, Romer y Weil presentaron el modelo de crecimiento económico de Solow aumentado con capital humano.
- Observaron que dicho modelo se ajustaba muy bien a los datos.
- Aquí, derivaremos y repasaremos las implicaciones de estado estable del modelo, y luego compararemos estos resultados con las conclusiones del modelo estándar de Solow.

- Suponga que la economía produce un bien, producción (Y).
- Se produce según:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}$$

  donde $\alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta \in [0,1]$ y t denota tiempo.
- Esto implica que la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala en sus tres factores: capital físico (K), capital humano (H) y trabajo de productividad aumentada (AL).
- Específicamente, es una función de producción Cobb-Douglas.
- Se supone que todos los mercados (tanto de factores como de producto) son perfectamente competitivos.
- Se supone que todas las empresas son idénticas.
- Entonces, la economía puede ser descrita por un agente representativo.

- Se supone que el capital físico y el capital humano son factores de acumulación; es decir, el agente representativo ahorra producción para tener más capital (ya sea físico o humano).
- Sus ecuaciones de movimiento son:"

$$\dot{K}(t) = s_K Y(t) - \delta K(t)$$
$$\dot{H}(t) = s_H Y(t) - \delta H(t)$$

  donde s_K y s_H son las tasas de ahorro para el capital físico y el capital humano, respectivamente.
- Ambas tasas de ahorro son exógenas.
- Observe que, para simplificar el álgebra, se supone que tanto el capital físico como el capital humano se deprecian a la misma tasa, δ.

- Las ecuaciones de movimiento para el trabajo (L) y la productividad que aumenta el trabajo (A) son:

$$\dot{L}(t) = nL(t)$$
$$\dot{A}(t) = gA(t)$$

donde n y g son tasas de crecimiento dadas exógenamente.

- Con estas cinco ecuaciones, podemos resolver las trayectorias de crecimiento equilibrado de la producción, el capital físico y el capital humano.
- Para obtener una solución exacta para los niveles de estas variables en cualquier momento, también necesitamos condiciones iniciales de capital físico, capital humano, productividad y trabajo.
- Sin embargo, para encontrar la ruta de tiempo completa para estas variables se requiere un conocimiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales, que no hemos cubierto en este curso.
- Aquí, la atención se centrará en el crecimiento a largo plazo de estas variables y sus niveles a largo plazo

- El truco aquí es encontrar alguna transformación de estas variables que converja a un estado estable.
- En el modelo de Solow, transformamos el sistema para que todo se exprese en términos de trabajador "efectivo".
- Esto significa que dividimos cada variable por $A(t)L(t)$, o el número de trabajadores efectivos (trabajadores con productividad aumentada) en la economía en el momento t.
- A esto también se le llama poner el sistema en forma intensiva.
- Seguiremos la misma estrategia aquí.

- Defina

$$\tilde{y}(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}, \qquad \tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}, \qquad \tilde{h}(t) = \frac{H(t)}{A(t)L(t)}.$$

- En forma intensiva, la función de producción y las ecuaciones de movimiento para el capital físico y humano se convierten en:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= \tilde{k}(t)^{\alpha}\tilde{h}(t)^{\beta} \\
\dot{\tilde{k}}(t) &= s_K\tilde{y}(t) - [n+g+\delta]\tilde{k}(t) \\
\dot{\tilde{h}}(t) &= s_H\tilde{y}(t) - [n+g+\delta]\tilde{h}(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} &= \frac{K(t)^{\alpha}H(t)^{\beta}[A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}}{A(t)L(t)} \\
\tilde{y}(t) &= \frac{K(t)^{\alpha}H(t)^{\beta}[A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}}{[A(t)L(t)]^{\alpha}[A(t)L(t)]^{\beta}[A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}} \\
\tilde{y}(t) &= \tilde{k}(t)^{\alpha}\tilde{h}(t)^{\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{k}}(t) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\right) \\
&= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}[\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)] \\
&= \frac{s_K Y(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{[\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)]}{A(t)L(t)} \\
&= s_K \tilde{y}(t) - \delta\tilde{k}(t) - \tilde{k}(t)[g + n] \\
\dot{\tilde{k}}(t) &= s_K \tilde{y}(t) - [n + g + \delta]\tilde{k}(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{h}}(t) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{H(t)}{A(t)L(t)}\right) \\
&= \frac{\dot{H}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{H(t)}{[A(t)L(t)]^2}[\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)] \\
&= \frac{s_H Y(t) - \delta H(t)}{A(t)L(t)} - \frac{H(t)}{A(t)L(t)}\frac{[\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)]}{A(t)L(t)} \\
&= s_H \tilde{y}(t) - \delta\tilde{h}(t) - \tilde{h}(t)[g+n] \\
\dot{\tilde{h}}(t) &= s_H \tilde{y}(t) - [n+g+\delta]\tilde{h}(t)
\end{aligned}
$$

- En un estado estacionario, el capital físico y humano por trabajador efectivo debe ser constante.
- Esto implica que podemos resolver el estado estable encontrando los valores de $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ que establecen las ecuaciones de movimiento anteriores en cero (aparte del trivial estado estable dado estableciendo $\tilde{k}$ o $\tilde{h}$ igual a cero).
- Las condiciones de estado estacionario son entonces:

$$
\begin{aligned}
s_K \tilde{y}(t) &= [n + g + \delta]\tilde{k}(t) \\
s_H \tilde{y}(t) &= [n + g + \delta]\tilde{h}(t).
\end{aligned}
$$

- Por supuesto, también necesitamos la definición de la función de producción, $\tilde{y}(t) = \tilde{k}(t)^{\alpha}\tilde{h}(t)^{\beta}$.
- Tomando el logaritmo de las tres condiciones anteriores, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\log s_K + \log \tilde{y}(t) &= \log(n + g + \delta) + \log \tilde{k}(t) \\
\log s_H + \log \tilde{y}(t) &= \log(n + g + \delta) + \log \tilde{h}(t) \\
\log \tilde{y}(t) &= \alpha \log \tilde{k}(t) + \beta \log \tilde{h}(t)
\end{aligned}
$$

El sistema de ecuaciones anteriores puede escribirse

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\alpha & -\beta & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \log \tilde{k}(t) \\ \log \tilde{h}(t) \\ \log \tilde{y}(t) \end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \log s_K \\ \log s_H \\ \log(n+g+\delta) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \log \tilde{k}(t) \\ \log \tilde{h}(t) \\ \log \tilde{y}(t) \end{bmatrix}
&= \tfrac{1}{1-\alpha-\beta}
\begin{bmatrix} 1-\beta & \beta & -1 \\ \alpha & 1-\alpha & -1 \\ \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \log s_K \\ \log s_H \\ \log(n+g+\delta) \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{1-\alpha-\beta}
\begin{bmatrix} \log\left(\frac{s_K^{1-\beta} s_H^{\beta}}{n+g+\delta}\right) \\ \log\left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{n+g+\delta}\right) \\ \log\left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{\beta}}{(n+g+\delta)^{\alpha+\beta}}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Así, encontramos que en estado estacionario

$$\tilde{k}^*(t) = \left(\frac{s_K}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

$$\tilde{h}^*(t) = \left(\frac{s_K}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

$$\tilde{y}^*(t) = \left(\frac{s_K}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

- Los resultados del modelo estándar de Solow se pueden recuperar del sistema anterior imponiendo la restricción de que $\beta = 0$.
- En el modelo estándar de Solow, el nivel de producción en estado estable por trabajador efectivo es:

$$\tilde{y}^*_{\text{Solow}}(t) = \left(\frac{s_K}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- Note la similitud de los dos resultados.
- Cuando $\beta \neq 0$, la tasa de acumulación de capital humano puede afectar el nivel de producción en estado estacionario por trabajador efectivo.
- Sin embargo, el mensaje general es el mismo: cuanto más se ahorra, mayor será el nivel de producción por trabajador efectivo.

- Desde una perspectiva empírica, la adición de capital humano al modelo permite invocar otra dimensión para explicar las diferencias en los niveles de producción entre países.
- Se prevé que los países que invierten en educación tengan niveles de ingresos más altos que los que no lo hacen, para cualquier tasa de inversión dada en capital físico.

- Dado que el producto por trabajador en la senda de crecimiento equilibrado es

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = A(t)\tilde{y}^*(t)$$

independientemente de si se incluye o no el capital humano, el crecimiento de la producción por trabajador en la senda de crecimiento equilibrado sigue siendo g, la tasa de progreso tecnológico o la tasa de crecimiento de la productividad que aumenta la mano de obra.

- El crecimiento de la producción por trabajador en la senda de crecimiento equilibrado en el modelo de Solow con aumento de capital humano es el mismo que en el modelo estándar:

$$\frac{\dot{\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)}}{\frac{Y(t)}{L(t)}} = g$$

- Dado que todos los países utilizan el mismo stock de tecnología, el modelo predice experiencias similares de crecimiento a largo plazo para todos los países.
- Sin embargo, la adición de capital humano al modelo aumenta nuestra capacidad para explicar las diferencias entre países en los niveles de ingresos.

3. Implicaciones

Predicciones del modelo

1. Convergencia condicional después de controlar por capital humano: Al condicionar el nivel de capital humano, los países pobres tienen tendencia a crecer más rápido.
2. Divergencia condicional después de controlar el nivel inicial de per ingreso per cápita: Condicionando al nivel de ingreso per cápita, los países con más capital humano crecen más rápido.

Evidencia empírica

Mankiw, Romer y Weil:

	Modelo básico	Modelo aumentado
$\ln(s_k)$	1.42	0.69
	(.14)	(0.13)
$\ln(s_h)$		0.66
		(0.07)
$\ln(n+g+\delta)$	-1.97	-1.73
	(.56)	(0.41)
$\bar{R}^2$	0.59	0.78
α implícito	0.59	0.30
β implícito		0.28
Observaciones	98	98