Tema 9
Modelos económicos dinámicos de acción continua en tiempo discreto

Randall Romero Aguilar, PhD

Universidad de Costa Rica
SP6534 - Economía Computacional

I Semestre 2020
Última actualización: 9 de junio de 2020

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. Condiciones de Euler

Condiciones de Euler

- Ahora dirigimos nuestra atención a modelos de decisión de Markov de tiempo discreto con espacios de estado y acción puramente continuos y funciones de recompensa y transición continuamente diferenciables.
- Las soluciones óptimas para tales modelos pueden caracterizarse por condiciones de equilibrio de primer orden llamadas condiciones de Euler.
- Las condiciones de Euler nos ayudan a comprender las características esenciales de un problema de decisión dinámico y nos ofrecen una forma alternativa de resolver la política óptima.

- Primero derivamos las condiciones de Euler bajo los supuestos de que el modelo es de horizonte infinito y determinista y que las acciones no tienen restricciones.
- Bajo estos supuestos, la ecuación de Bellman toma la forma relativamente simple:

$$V(s) = \max_x \{f(s,x) + \delta V(g(s,x))\}, \qquad s \in S.$$

- Sean d_s y d_x las dimensiones de las variables de estado y acción, respectivamente.

- Las condiciones de Euler incluyen a la derivada de la función de valor
$$\lambda(s) \equiv V'(s).$$
- Llamamos $\lambda : S \mapsto \Re^{d_s}$ la función de precio sombra porque da los precios que el agente de optimización dinámica imputa a cada una de las d_s variables de estado.

- Las condiciones de Euler se derivan aplicando los teoremas de K-K-T y de la envolvente a la ecuación de Bellman.
- El teorema de K-K-T implica que la acción óptima x, dado el estado s, satisface la condición de equimarginalidad

$$0 = f_x(s,x) + \delta\lambda(g(s,x))g_x(s,x).$$

- El teorema de la envolvente implica

$$\lambda(s) = f_s(s,x) + \delta\lambda(g(s,x))g_s(s,x).$$

- Aquí, f_s, f_x, g_s, y g_x denotan derivadas parciales, cuyas dimensiones son $1 \times d_s$, $1 \times d_x$, $d_s \times d_s$, y $d_s \times d_x$, respectivamente.

- Las condiciones de Euler implican que a lo largo de una senda óptima

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(s_t, x_t) + \delta\lambda_{t+1} g_x(s_t, x_t) \\ \lambda_t &= f_s(s_t, x_t) + \delta\lambda_{t+1} g_s(s_t, x_t). \end{aligned}$$

Estado estacionario

- El modelo puede poseer un estado estacionario bien definido al cual converge el proceso económico optimizado con el tiempo:

$$
\begin{aligned}
s^* &\equiv \lim s_t \\
x^* &\equiv \lim x_t \\
\lambda^* &\equiv \lim \lambda_t.
\end{aligned}
$$

- En el estado estacionario, el estado s^*, la acción x^* y el precio sombra λ^*, si existen, deben satisfacer las condiciones de Euler y de estacionariedad en estados:

$$
\begin{aligned}
0 &= f_x(s^*, x^*) + \delta \lambda^* g_x(s^*, x^*) \\
\lambda^* &= f_s(s^*, x^*) + \delta \lambda^* g_s(s^*, x^*) \\
s^* &= g(s^*, x^*).
\end{aligned}
$$

- Las condiciones de estado estacionario plantean una ecuación no lineal de dimensión finita que puede resolverse numéricamente y, a menudo, analíticamente, sin tener que resolver la ecuación de Bellman.
- Conocer el estado estacionario es útil para comprender las tendencias a largo plazo del proceso económico optimizado.
- Conocer el estado estacionario también es útil cuando se desarrollan conjeturas iniciales para algoritmos de solución numérica para el modelo.

Ecuación de Euler

- Si la función de transición g no depende del estado s, la función de precio sombra puede eliminarse como incógnita y las condiciones de Euler pueden reducirse a una sola ecuación funcional en una sola incógnita, la política óptima x:

$$0 = f_x\left[s, x(s)\right] + \delta f_s\left\{g\left[x(s)\right], x\left[g(x(s))\right]\right\} g'(x(s)).$$

- Esta ecuación, cuando existe, se conoce como la ecuación de Euler.

- La ecuación de Euler implica que a lo largo de una senda óptima

$$0 = f_x(s_t, x_t) + \delta f_s(s_{t+1}, x_{t+1}) g'(x_t)$$

- y, en el estado estacionario

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(s^*, x^*) + \delta f_s(s^*, x^*) g'(x^*) \\ s^* &= g(x^*). \end{aligned}$$

Condiciones de Euler estocásticas

- Si el modelo es estocástico, las condiciones de Euler toman la forma:

  $$0 = f_x(s,x) + \delta E_\epsilon \left[\lambda(g(s,x,\epsilon))g_x(s,x,\epsilon)\right]$$

  y

  $$\lambda(s) = f_s(s,x) + \delta E_\epsilon \left[\lambda(g(s,x,\epsilon))g_s(s,x,\epsilon)\right]$$

  para todo $s \in S$.

- Los modelos estocásticos carecen de estados estacionarios simples, ya que los estados visitados por el proceso y las acciones tomadas por el agente variarán con el tiempo debido a choques aleatorios.
- Sin embargo, en condiciones moderadas, si el modelo es estacionario, el proceso a lo largo del tiempo visitará estados de acuerdo con una distribución ergódica bien definida.
- Aunque la distribución ergódica puede caracterizarse formalmente a través de una ecuación funcional, la forma más fácil de visualizarla es resolver y simular el modelo para un gran número de períodos.

- Aunque los modelos estocásticos carecen de estados estacionarios simples, es útil derivar el estado estacionario del modelo con su choque fijado en su media.
- Conocer el estado estacioario determinístico de la versión no estocástica del modelo es útil cuando se desarrollan conjeturas iniciales para algoritmos de solución numérica.
- Aunque el estado estacionario determinístico no necesariamente es igual a la media de la distribución ergódica, los dos deberían estar razonablemente cerca si la distribución ergódica es más o menos simétrica.

Restricciones de límite

- Si las acciones están sujetas a límites simples que son funciones diferenciables de la variable de estado

$$a(s) \leq x \leq b(s)$$

entonces las condiciones de Euler toman la forma de un problema de complementariedad funcional

$$a_i(s) \leq x_i \leq b_i(s)$$

$$x_i > a_i(s) \Longrightarrow \mu_i(s) \geq 0$$

$$x_i < b_i(s) \Longrightarrow \mu_i(s) \leq 0$$

$$\begin{aligned}\lambda(s) = f_s(s,x) + \delta E_\epsilon\left[\lambda(g(s,x,\epsilon))g_s(s,x,\epsilon)\right] \\ + \min(\mu(s),0)a'(s) + \max(\mu(s),0)b'(s)\end{aligned}$$

- . . . donde

$$\mu(s) \equiv f_x(s,x) + \delta E_\epsilon \left[\lambda(g(s,x,\epsilon))g_x(s,x,\epsilon)\right]$$

- Aquí, μ_i, mide la recompensa actual y futura esperada de un aumento marginal en la i-ésima variable de acción x_i.
- En el óptimo, μ_i debe ser no positivo si x_i está por debajo de su límite superior; de lo contrario, se obtendrían recompensas adicionales al aumentar x_i.
- De manera similar, mu_i debe ser no negativo si x_i está por encima de su límite inferior; de lo contrario, se obtendrían recompensas adicionales al reducir x_i.
- Si x_i está estrictamente entre sus límites, μ_i debe ser cero.

2. Control lineal-cuadrático

Modelo de control lineal-cuadrático

- Un modelo de control lineal-cuadrático (L-Q) es un modelo de decisión de Markov de acción de estado continuo en tiempo discreto con:
  - función de recompensa cuadrática
  - función de transición lineal
  - elemento de acciones no restringidas
- El modelo de control L-Q es uno de los pocos modelos de decisión de Markov de acción continua en estado continuo de tiempo discreto con una solución de forma cerrada conocida.

- Las funciones de recompensa y transición del modelo de control L-Q toman la forma

$$
\begin{aligned}
f(s,x) &= F_0 + F_s s + F_x x + \tfrac{1}{2} s' F_{ss} s + s' F_{sx} x + \tfrac{1}{2} x' F_{xx} x \\
g(s,x,\epsilon) &= G_0 + G_s s + G_x x + \epsilon.
\end{aligned}
$$

- Variables

$$
\begin{aligned}
s &= d_s \times 1 \text{ vector de estados} \\
x &= d_x \times 1 \text{ vector de acciones} \\
\epsilon &= d_s \times 1 \text{ vector de choques exógenos}
\end{aligned}
$$

- Parámetros

F_0	1×1	F_s	$1 \times d_s$	F_x	$1 \times d_x$
F_{ss}	$d_s \times d_s$	F_{sx}	$d_s \times d_x$	F_{xx}	$d_x \times d_x$
G_0	$d_s \times 1$	G_s	$d_s \times d_s$	G_x	$d_s \times d_x$

F_{ss} simétrica, F_{xx} simétrica definida negativa , y $\mathbb{E}\,\epsilon = 0$.

- Por inducción, se puede demostrar que las funciones óptimas de política y precio sombra del modelo de control L-Q estacionario de horizonte infinito son lineales en la variable de estado:

$$
\begin{aligned}
x(s) &= x^* + \Gamma(s - s^*) \\
\lambda(s) &= \lambda^* + \Lambda(s - s^*).
\end{aligned}
$$

- Aquí, Γ es $d_x \times d_s$, Λ es $d_s \times d_s$ simétrica, y s^*, x^*, y λ^* son los valores de estados estacionario determinístico del estado, la acción, y el precio sombra.
- Las funciones de política óptima y de precio sombra del modelo L-Q no dependen de momentos más altos del choque —esto se conoce como propiedad de equivalente cierto.

- Los valores de estados estacionario determinístico del estado s^*, la acción x^*, y el precio sombra λ^* se pueden calcular resolviendo conjuntamente las condiciones de Euler y la condición de estacionariedad del estado, una ecuación lineal:

$$\begin{bmatrix} F'_{sx} & F_{xx} & \delta G'_x \\ F_{ss} & F_{sx} & \delta G'_s - I_n \\ G_s - I_n & G_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^* \\ x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F'_x \\ -F'_s \\ -G_0 \end{bmatrix}$$

Ecuación de Riccati

- Λ está caracterizado por el punto fijo vectorial de la ecuación de Riccati:

$$\Lambda = -H_{sx} H_{xx}^{-1} H_{sx}' + H_{ss}$$

  donde

$$H_{ss} = \delta G_s' \Lambda G_s + F_{ss}$$

$$H_{sx} = \delta G_s' \Lambda G_x + F_{sx}$$

$$H_{xx} = \delta G_x' \Lambda G_x + F_{xx}$$

- Dado Λ, Γ puede obtenerse a partir de

$$\Gamma = -H_{xx}^{-1} H_{sx}'$$

- La ecuación de Riccati a menudo se puede resolver utilizando la iteración de funciones, pero la descomposición QZ es más confiable.

- Si el estado y la acción son de una sola dimensión, la ecuación de Riccati toma la forma cuadrática

$$a\Lambda^2 + b\Lambda + c = 0$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \delta G_x^2 \\ b &= F_{xx} - \delta F_{xx} G_s^2 - \delta F_{ss} G_x^2 + 2\delta F_{sx} G_s G_x \\ c &= F_{sx}^2 - F_{ss} F_{xx} \end{aligned}$$

la cual puede resolverse usando la fórmula cuadrática.

- Si además $F_{ss}F_{xx} = F_{sx}^2$, una condición que frecuentemente se cumple en problemas económicos, entonces

$$\Lambda = \frac{1}{G_x^2}\left(F_{ss} G_x^2 - 2F_{sx} G_s G_x + F_{xx} G_s^2 - F_{xx}/\delta\right).$$

Ejemplo 1:
Modelo lineal cuadrático de una dimensión

`dp/16 Linear-Quadratic Model`

Consideremos el problema de control L-Q de una dimensión con

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0.0 & F_s &= -0.8 & F_x &= -0.7 \\
F_{ss} &= -0.8 & F_{sx} &= 0.0 & F_{xx} &= -0.1 \\
G_0 &= 0.5 & G_s &= -0.1 & G_x &= 0.2 \\
\delta &= 0.9
\end{aligned}
$$

Para resolverlo con la clase `LQmodel` del paquete `CompEcon`

```python
F0, Fs, Fx = 0.0, -1.0, -0.0
Fss, Fsx, Fxx = -1.0, 0.0, -0.1
G0, Gs, Gx  =  0.5, -0.2, 0.5
delta = 0.9

model = LQmodel(F0,Fs,Fx,Fss,Fsx,Fxx,G0,Gs,Gx,delta)
model.steady
```

obtenemos

```
{'s': array([[-0.4528]]),
 'x': array([[-2.0867]]),
 'p': array([[-0.4637]]),
 'v': array([[1.3257]])}
```

```python
s = np.linspace(-5, 5, 101)
S = model.solution(s)
S['x'].plot()
```

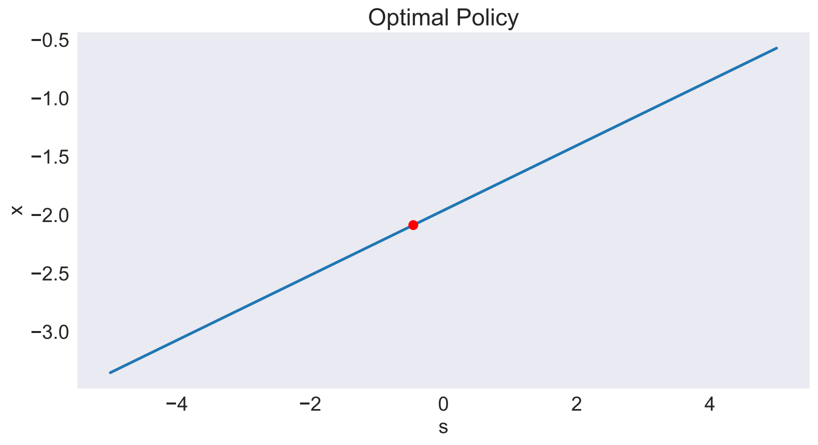

Figura 9.1: Política óptima

```
S['value'].plot()
```

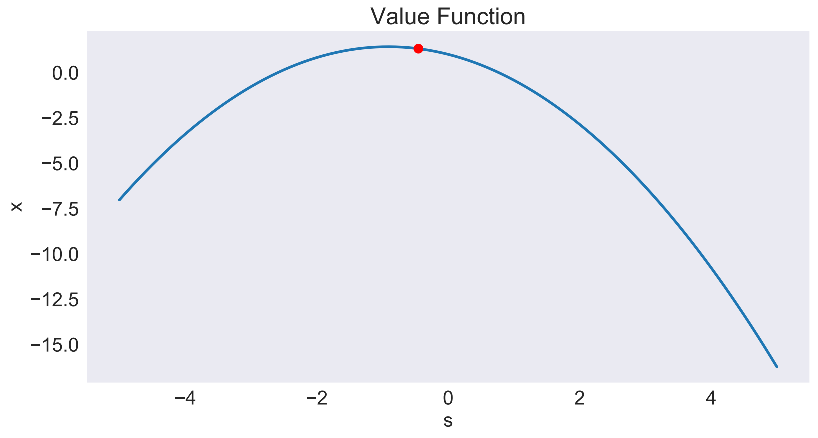

Figura 9.2: Función valor

Ejemplo 2:

Modelo lineal cuadrático de dimensión superior

`dp/16 Linear-Quadratic Model`

Consideremos el problema de control L-Q de dimensión superior con $F_0 = 3$ y $\delta = 0.95$.

$$F_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad F_x = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F_{ss} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \qquad F_{sx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F_{xx} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad G_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G_x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para resolverlo con la clase `LQmodel` del paquete

```
F0  = 3
Fs  = [1, 0]
Fx  = [1, 1]
Fss = [[-7, -2],[-2, -8]]
Fsx = [[0, 0], [0, 1]]
Fxx = [[-2, 0], [0, -2]]
G0  = [[1], [1]]
Gs  = [[-1, 1],[1, 0]]
Gx  = [[-1, -1],[2, 3]]
delta = 0.95

model2 = LQmodel(F0,Fs,Fx,Fss,Fsx,Fxx,G0,Gs,Gx,delta)
model2.steady
```

Esto nos da por resultado

```
{'s': array([[ 0.6436],
        [-0.3275]]),
 'x': array([[ 0.1272],
        [-0.7418]]),
 'p': array([[-2.1849],
        [-1.4849]]),
 'v': array([[24.9664]])}
```

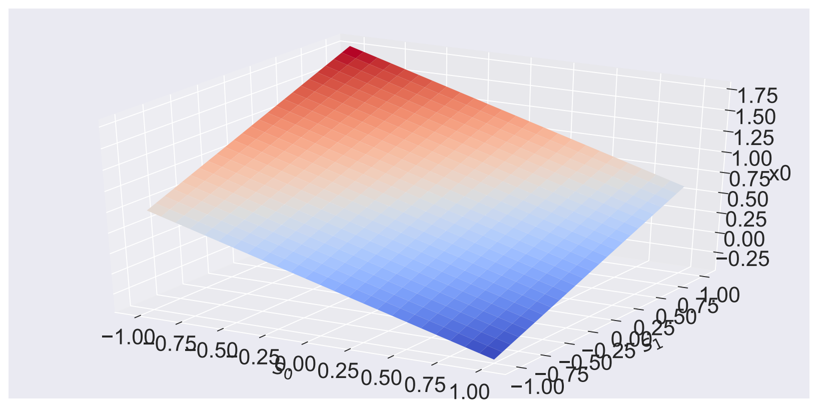

Figura 9.3: Política óptima x_1

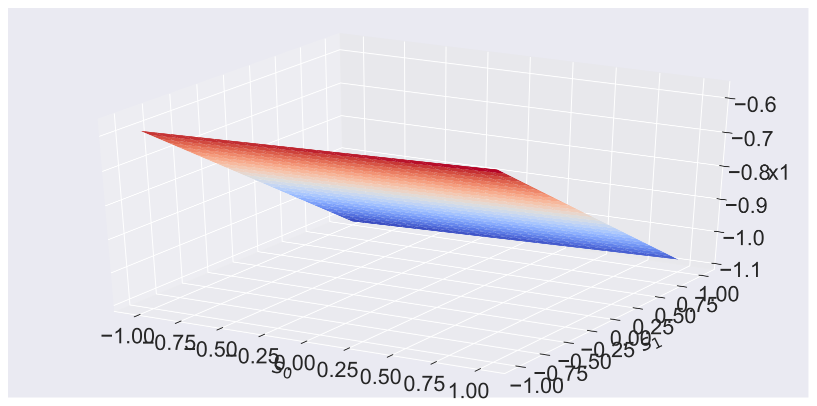

Figura 9.4: Política óptima x_2

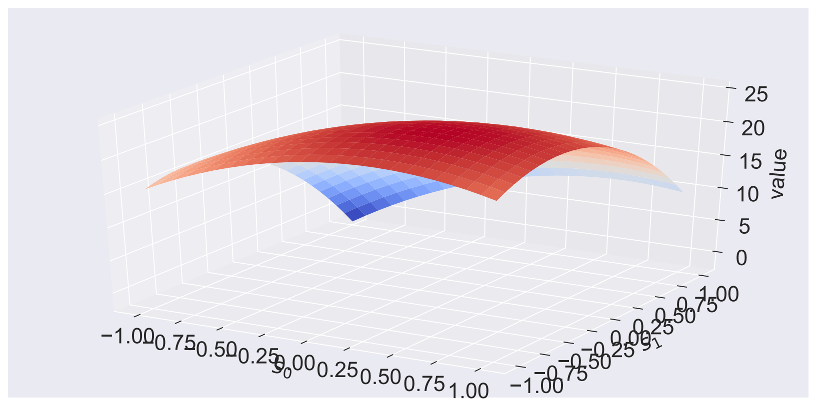

Figura 9.5: Función valor

3. Aproximación lineal-cuadrática

Aproximación lineal-cuadrática

- Debido a que los modelos L-Q son relativamente fáciles de resolver, muchos analistas usan aproximación lineal-cuadrática para calcular soluciones aproximadas a modelos más generales.
- La aproximación L-Q requiere
  - reemplazar la función de recompensa f con aproximación cuadrática
  - reemplaza la función de transición de estado g con aproximación lineal
  - descartar las restricciones de acción, si las hubiera
- Entonces se toma la política óptima del modelo de control L-Q resultante como una solución aproximada al modelo original.

- En la práctica, g y f se aproximan usando expansiones de Taylor de primer y segundo orden alrededor del estado estacionario del estado s^* y acción x^*:

$$
\begin{aligned}
f(s,x) \approx f^* + f_s^*(s-s^*) + f_x^*(x-x^*) + \frac{1}{2}(s-s^*)' f_{ss}^*(s-s^*) \ldots \\
+ (s-s^*)' f_{sx}^*(x-x^*) + \frac{1}{2}(x-x^*)' f_{xx}^*(x-x^*) \\
g(s,x,\epsilon) \approx s^* + g_s^*(s-s^*) + g_x^*(x-x^*).
\end{aligned}
$$

- donde f^*, f_s^*, f_x^*, f_{ss}^*, f_{sx}^*, f_{xx}^*, g^*, g_s^*, y g_x^* son los valores y derivadas parciales de f y g evaluadas en el estado estacionario determinístico.

- Este modelo se puede representar en forma canónica utilizando las siguientes sustituciones:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= f^* - f_s^* s^* - f_x^* x^* + \tfrac{1}{2} s^{*\prime} f_{ss}^* s^* + s^{*\prime} f_{sx}^* x^* + \tfrac{1}{2} x^{*\prime} f_{xx}^* x^* \\
F_s &= f_s^* - s^{*\prime} f_{ss}^* - x^{*\prime} f_{xs}^* \\
F_n &= f_n^* - s^{*\prime} f_{sx}^* - x^{*\prime} f_{xx}^* \\
F_{ss} &= f_{ss}^* \\
F_{sx} &= f_{sx}^* \\
F_{xx} &= f_{xx}^* \\
G_0 &= g - g_s^* s^* - g_x^* x^* \\
G_s &= g_s^* \\
G_x &= g_x^*
\end{aligned}
$$

La aproximación L-Q...

- se basa en expansiones de la serie Taylor que son válidas solo cerca del estado estacionario determinístico.
- puede funcionar bien cerca del estado estacionario si el modelo es determinístico o tiene un choque de baja varianza.
- funcionará mal si los choques pueden llevar a la variable de estado lejos del estado estacionario, donde las aproximaciones de Taylor se deterioran.
- funcionará especialmente mal si las restricciones ignoradas son ocasionalmente vinculantes.
- no es aconsejable, excepto cuando los supuestos del modelo L-Q se cumplen globalmente, o casi se cumplen.

4. Modelos de acción continua de una dimensión

Modelo 1:
Crecimiento económico óptimo determinístico

dp/06 Deterministic Optimal Economic Growth Model

Crecimiento económico óptimo determinístico

- Consideremos una economía que produce y consume un único bien.
- Cada periodo t empieza con un acervo predeterminado de riqueza s_t, del cual una cantidad k_t se invierte y el resto $s_t - k_t$ se consume, resultando en un beneficio social $\log(s_t - k_t)$.
- La riqueza evoluciona de acuerdo con $s_{t+1} = k_t^{\beta}$, donde β es la elasticidad de producción agregada.
- £Qué política de consumo-inversión maximiza el valor presente de los beneficios sociales actuales y futuros?

Formulation

Este es un modelo determinístico de horizonte infinito con las siguientes características estructurales:

- Una variable de estado continua, la riqueza

$$s_t \in (0, \infty).$$

- Una variable de acción continua, la inversión investment

$$k_t \in [0, s_t].$$

- La recompensa es el beneficio social actual

$$\log(s_t - k_t).$$

- La transición del estado se rige por

$$s_{t+1} = k_t^{\beta}$$

donde $0 < \beta < 1$.

Ecuación de Bellman

El valor presente de los beneficios sociales actuales y futuros, dada la riqueza s, satisface la ecuación de Bellman

$$V(s) = \max_{0 \leq k \leq s} \left\{ \log(s-k) + \delta V(k^{\beta}) \right\}.$$

- Esta ecuación de Bellman tiene una solución de forma cerrada conocida

$$V(s) = v^* + \frac{1}{1-\delta\beta}(\log(s) - \log(s^*))$$

con política óptima

$$k = \delta\beta s,$$

donde

$$\begin{aligned} s^* &= (\delta\beta)^{\beta/(1-\beta)} \\ v^* &= \log((1-\delta\beta)s^*)/(1-\delta). \end{aligned}$$

- Conocer la forma cerrada de la solución nos permitirá evaluar la precisión de las soluciones aproximadas que obtendremos numéricamente.

- Dados los supuestos, las restricciones sobre k nunca serán vinculantes en un óptimo, lo que implica que la función del precio sombra $\lambda(s) = V'(s)$ debe satisfacer las condiciones de Euler

$$\begin{aligned} 0 &= -(s-k)^{-1} + \delta\beta\lambda(k^{\beta})k^{\beta-1} \\ \lambda(s) &= (s-k)^{-1}. \end{aligned}$$

- Las condiciones de Euler implican que a lo largo de un sendero óptimo

$$\lambda_t = \delta\beta\lambda_{t+1}k_t^{\beta-1} = (s_t - k_t)^{-1}.$$

Estado estacionario

- En el estado estacionario, la riqueza s^*, la inversión k^*, y el precio sombra λ^* deben satisfacer las condiciones de Euler y de estado estacionario

$$\begin{aligned}\lambda^* &= \delta\beta\lambda^* {k^*}^{\beta-1} = (s^* - k^*)^{-1} \\ s^* &= {k^*}^{\beta}.\end{aligned}$$

- Estas condiciones implican que

$$\begin{aligned}s^* &= (\delta\beta)^{\beta/(1-\beta)} \\ k^* &= (\delta\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \\ \lambda^* &= \tfrac{(\delta\beta)^{\beta/(\beta-1)}}{1-\delta\beta}.\end{aligned}$$

- El método de colocación requiere que la función valor sea aproximada con una combinación lineal de funciones base ϕ_j escogidas apropiadamente.

$$V(s) \approx \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(s).$$

- Los n coeficientes c_j se fijan requiriendo que la función valor aproximada satisfaga la ecuación de Bellman en n nodos s_i escogidos apropiadamente.

Esto requiere resolver n ecuaciones de colocación no lineales

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(s_i) = \max_{0 \leq k \leq s_i} \left\{ \log(s_i - k) + \delta \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(k^{\beta}) \right\},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, para los n coeficientes desconocidos c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 3:
Crecimiento económico óptimo determinístico

- En el cuaderno de Jupyter `dp/06 Deterministic Optimal Economic Growth Model` resolvemos este modelo asumiendo que $\beta = 0.5$ y $\delta = 0.9$.
- La función valor se aproxima con una combinación lineal de $n = 15$ polinomios de Chebychev sobre $[0.2, 1.0]$.

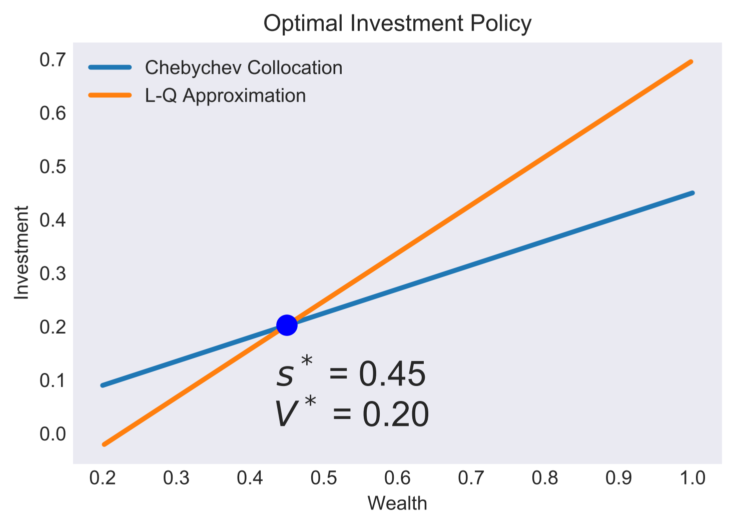

Figura 9.6: Política óptima de inversión

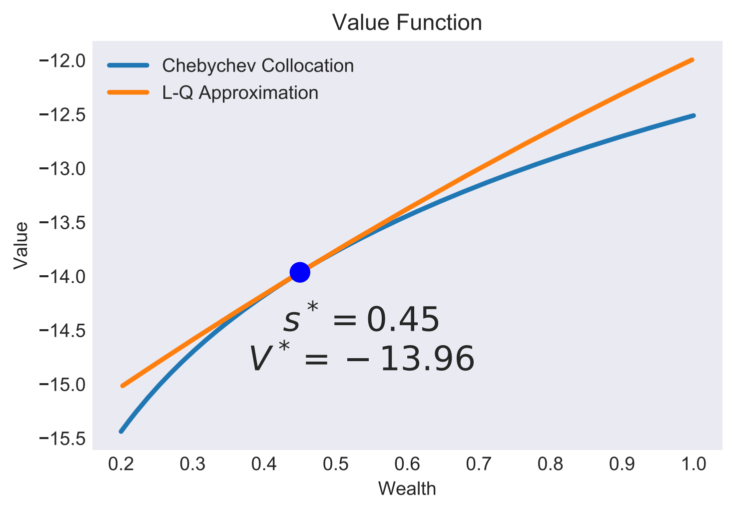

Figura 9.7: Función valor

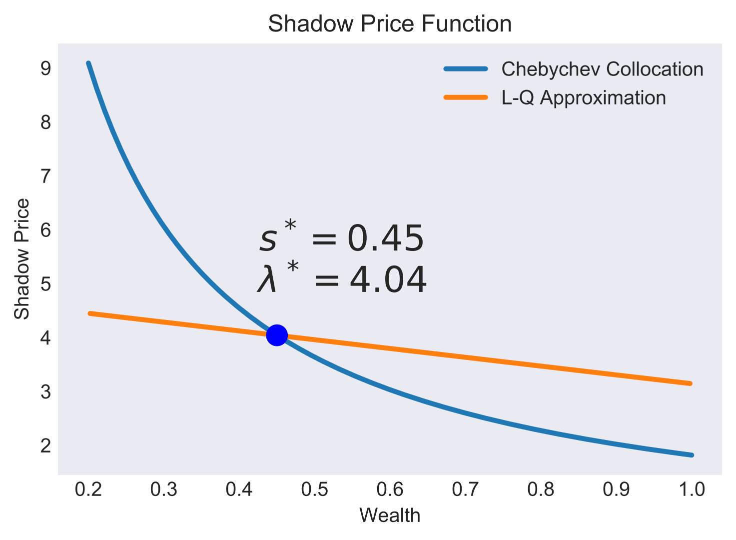

Figura 9.8: Función del precio sombra

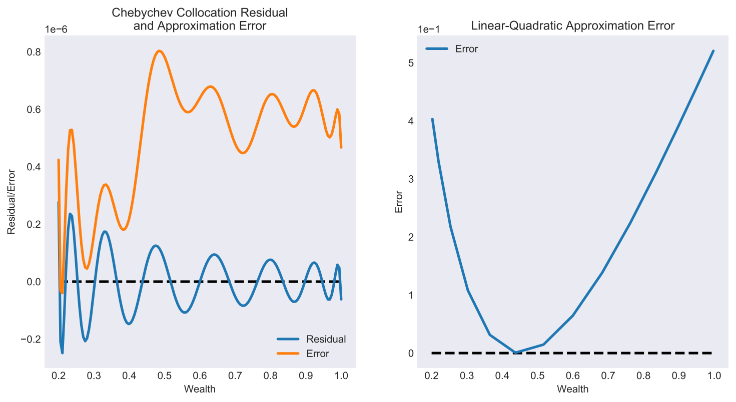

Figura 9.9: Residuos y errores de aproximación de la ecuación de Bellman aproximada con colocación de Chebychev (izquierda) y errores de la aproximación lineal-cuadrática

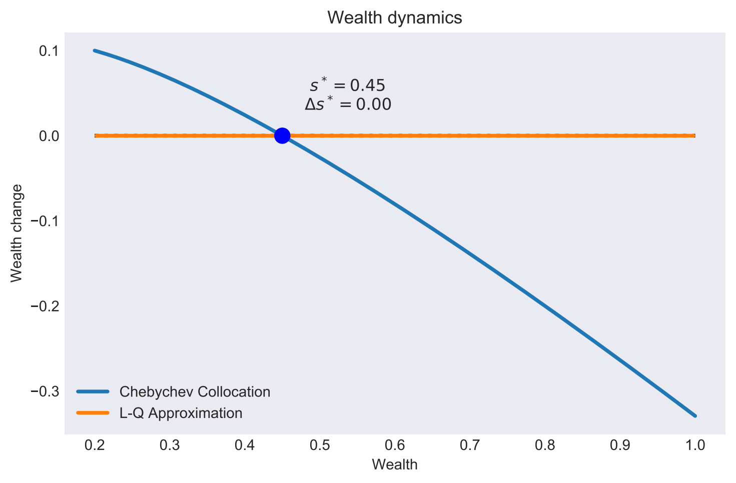

Figura 9.10: Dinámica de la riqueza

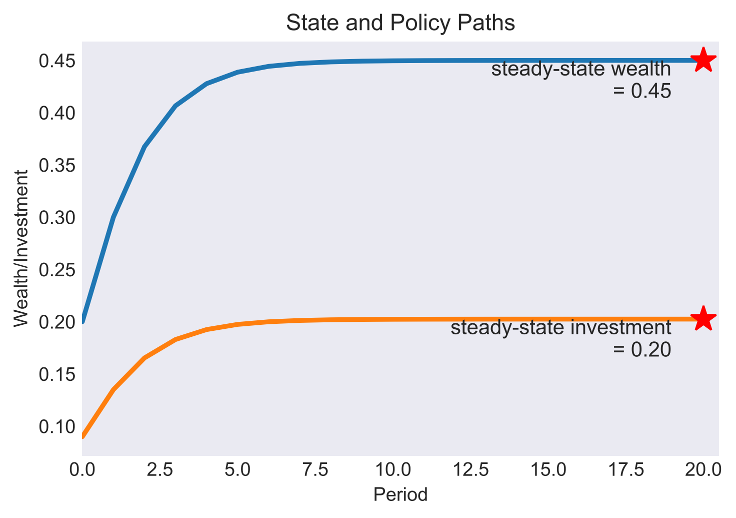

Figura 9.11: Riqueza e inversión simuladas

Análisis paramétrico

- En estado estacionario la riqueza y la inversión son 0.45 y 0.20, respectivamente.
- £Cómo cambian estos valores si...

escenario base	0.45	0.20
elasticidad de producción es 0.7?	0.34	0.21
elasticidad de producción es 0.3?	0.57	0.15
planeador descuenta menos el futuro ($\delta = 0.95$)?	0.47	0.23

- How would you revise the model and code to allow for stochastic production shocks?

5. Modelos de acción continua de dimensión superior

References I

Miranda, Mario J. y Paul L. Fackler (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT Press. isbn: 0-262-13420-9.

Romero-Aguilar, Randall (2016). *CompEcon-Python*. url: http://randall-romero.com/code/compecon/.