Tema 8

Introducción a optimización dinámica en tiempo discreto

Randall Romero Aguilar, PhD

Universidad de Costa Rica

SP6534 - Economía Computacional

I Semestre 2020

Última actualización: 20 de mayo de 2020

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. Introducción

- Empezamos ahora a estudiar modelos económicos dinámicos.
- Los modelos económicos dinámicos a menudo tienen complicaciones que raramente se encuentran juntas en otros modelos científicos:
    1. los humanos son capaces de evaluar cómo sus acciones les afectará en el futuro.
    2. muchos aspectos del comportamiento humano son impredecibles.
    3. el componente impredecible del comportamiento humano es usualmente complejo.
- Por ello, la mayoría de los modelos dinámicos útiles en economía son forward-looking, estocásticos, y altamente no lineales.

- Las complicaciones inherentes en los modelos forward-looking, estocásticos, no lineales, hacen imposible encontrar soluciones de forma cerrada en la mayoría de modelos económicos dinámicos.
- No obstante, los avances en las computadoras posibilitan a los economistas a analizar una amplia gama de modelos dinámicos que carecen de solución analítica, usando métodos numéricos.

Examinaremos tres clases de modelos económicos dinámicos en tiempo discreto:

- decisiones dinámicas de un solo agente económico
- decisiones dinámicas de múltiples agentes económicos
- modelos dinámicos de equilibrio de decisiones descentralizadas por parte de muchos individuos

Ejemplos de decisiones dinámicas por parte de un agente económico individual que involucran acciones discretas o mixtas:

- propietario del stand de madera que decide si tala su stand
- productor que decide si reemplaza un activo físico
- capitalista que decide si entra o sale de una industria
- trabajador desempleado que decide si acepta una oferta de trabajo
- inversor financiero que decide si ejerce una opción de venta
- prestatario que decide si no paga un préstamo
- agente que decide si realiza una transacción bancaria
- hogar que decide cuántos hijos tener

Ejemplos de decisiones dinámicas por parte de un agente económico individual que involucran acciones puramente continuas:

- individuo que decide cuánto consumir y ahorrar
- planificador que decide cuánto recurso renovable cosechar
- dueño de una mina que decide cuánto mineral extraer
- una ASADA que decide cuánta agua liberar
- banco central que intenta estabilizar la economía
- empresario que decide producción, inversión e inventario
- productor agrícola que gestiona una empresa ganadera

Ejemplos de decisiones dinámicas que involucran múltiples agentes económicos:

- expansión de capacidad en un mercado oligopolístico
- arreglos para compartir el riesgo de ingresos de los pequeños productores
- juntas nacionales de comercialización de granos que compiten en los mercados mundiales

Ejemplos de comportamiento económico dinámico descentralizado:

- rentabilidad de los activos en una economía puramente de intercambio
- mercados de futuros para mercancías primarias
- programa gubernamental de estabilización de precios de productos básicos

2. Modelos de decisión de Markov

Estructura

El modelo de decisión de Markov en tiempo discreto tiene esta estructura:

- Al inicio de cada período t, un agente observa el estado predeterminado de un proceso económico s_t, realiza una acción x_t, y gana una recompensa $f_t(s_t, x_t)$ que depende del estado y de la acción.
- El estado del proceso económico en $t+1$ dependerá del estado y la acción realizada en t y de un choque aleatorio exógeno ϵ_{t+1} que sucede después de que se realiza la acción en t:
$$s_{t+1} = g_t(s_t, x_t, \epsilon_{t+1}).$$
- El agente busca maximizar el valor presente de las recompensas actuales y futuras en el horizonte de tiempo T, descontado a una tasa ρ por período.

Espacio de estados

- El espacio de estados S enumera los estados alcanzables por el proceso económico.
- Un modelo de estado continuo posee variables de estado cuyos rangos son intervalos de la recta real.
- Un modelo de estado discreto posee variables de estado cuyos rangos son finitos.
- Un modelo de estado mixto posee tanto variables de estados continuas como discretas.

Espacio de acciones

- El espacio de acciones $X(s)$ enumera las acciones que el agente puede realizar cuando el proceso económico está en el estado s.
- Un modelo de acción continua posee variables de acción cuyos rangos son intervalos de la recta real.
- Un modelo de acción discreta posee variables de acción cuyos rangos son finitos.
- Un modelo de acción mixta posee tanto variables de acción continuas como discretas.

Función de recompensa

- Una función de recompensa $f : S \times X \mapsto \Re$ da la recompensa ganada en el periodo actual en términos del estado y la acción actuales.

$$f_t(s_t, x_t)$$

- El objectivo es maximizar el valor presente de las recompensas actual y futuras esperadas en el horizonte de tiempo T, descontado a un factor $\delta = \frac{1}{1+\rho}$ por período.

$$V_t(s_t) = \max_{\{x_\tau\}_{\tau=t}^{T}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{\tau=t}^{T} \delta^{\tau-t} f_\tau(s_\tau, x_\tau) \right]$$

- Nótese que el máximo valor alcanzable V_t depende del estado s_t.

Función de transición

- La función de transición $g : S \times X \times \Omega \mapsto S$ da el estado del siguiente período en términos del estado y la acción actuales y posiblemente de un choque aleatorio que sucede después de realizada la acción.

$$s_{t+1} = g_t(s_t, x_t, \epsilon_{t+1}).$$

Horizonte de tiempo

- Un modelo de decisión de Markov de tiempo discreto puede tener un horizonte finito ($T < \infty$) o un horizonte infinito ($T = \infty$).
- Si el horizonte es finito, debemos especificar un valor terminal que describe una recompensa final o valor de rescate ganado por el agente en el período $T + 1$ como función del estado en el período $T + 1$, luego de que la última decisión se tome en el período T.

Formulación del modelo

Para especificar completamente un modelo de decisión de Markov, debemos identificar con claridad

- las variables de estado y el espacio de estados
- las variables de acción y el espacio de acciones
- la función de recompensa
- la función de transición
- el horizonte de tiempo y, si es finito, el valor terminal

3. Ecuación de Bellman

Política óptima

Dado un modelo de decisión de Markov en tiempo discreto, una política óptima es una secuencia de reglas $\{x_t^*\}$ que prescriben la acción $x = x_t^*(s)$ que el agente debe realizar en cada período t si el proces está en el estado s para que se maximice el valor presente de las recompensas actual y futuras esperadas.

Principio de optimalidad

El problema de decisión de Markov en tiempo discreto puede analizarse utilizando el principio de optimalidad de Bellman, que fue articulado por Richard Bellman en 1957 de esta manera:

> *"Una política óptima tiene la propiedad de que, cualquiera sean el estado y decisión iniciales, el resto de decisiones debe constituir una política óptima con respecto al estado que resulte de la primera decisión."*

Programación dinámica

- El principio de optimalidad de Bellman motiva una estrategia para resolver modelos de decisión dinámica llamada programación dinámica.
- La programación dinámica es superior a enfoques alternativos de optimización dinámica porque, en un marco unificado, puede fácilmente manejar
  - modelos determinísticos y estocásticos
  - modelos en tiempo discreto y continuo
  - modelos con estados discretos y continuos
  - modelos con acciones discretas y continuas
  - modelos con restricciones
- La programación dinámica introduce el concepto de la función valor y la caracteriza como la solución de una ecuación funcional conocida como la ecuación de Bellman.

La función valor

- Denotemos por $V_t(s)$ el valor presente máximo alcanzable de las recompensas presente y futuras esperadas, dado que el proceso económico está en el estado s en el período t.
- LLamamos a $V_t : S \mapsto \mathfrak{R}$ la función valor del período t.
- Las funciones valor son desconocidas a priori y deben ser derivadas a partir del modelo subyacente.

La ecuación de Bellman

El principio de optimalidad implica que las funciones valor V_t deben satisfacer la ecuación de Bellman

$$V_t(s) = \max_{x \in X(s)} \{f_t(s,x) + \delta\, \mathbb{E}_t\, V_{t+1}(g_t(s,x,\epsilon))\}, \quad s \in S.$$

donde $\delta = \frac{1}{1+\rho}$ es llamado el factor de descuento.

La ecuación de Bellman se obtiene de la función objetivo:

$$
\begin{aligned}
V_t(s_t) &= \max_{\{x_\tau\}_{\tau=t}^{T}} \mathbb{E}_t\left[\sum_{\tau=t}^{T} \delta^{\tau-t} f_\tau(s_\tau, x_\tau)\right] \\
&= \max_{\{x_\tau\}_{\tau=t}^{T}} \mathbb{E}_t\left[f_t(s_t, x_t) + \sum_{\tau=t+1}^{T} \delta^{\tau-t} f_\tau(s_\tau, x_\tau)\right] \\
&= \max_{\{x_\tau\}_{\tau=t}^{T}} \left\{f_t(s_t, x_t) + \mathbb{E}_t\left[\sum_{\tau=t+1}^{T} \delta^{\tau-t} f_\tau(s_\tau, x_\tau)\right]\right\} \\
&= \max_{\{x_\tau\}_{\tau=t}^{T}} \left\{f_t(s_t, x_t) + \delta\, \mathbb{E}_t\, \mathbb{E}_{t+1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{T} \delta^{\tau-(t+1)} f_\tau(s_\tau, x_\tau)\right]\right\} \\
&= \max_{x_t} \left\{f_t(s_t, x_t) + \delta\, \mathbb{E}_t \max_{\{x_\tau\}_{\tau=t+1}^{T}} \mathbb{E}_{t+1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{T} \delta^{\tau-(t+1)} f_\tau(s_\tau, x_\tau)\right]\right\} \\
&= \max_{x_t} \left\{f_t(s_t, x_t) + \delta\, \mathbb{E}_t\, V_{t+1}(s_{t+1})\right\} \\
&= \max_{x_t} \left\{f_t(s_t, x_t) + \delta\, \mathbb{E}_t\, V_{t+1}(g_t(s_t, x_t, \epsilon_{t+1}))\right\}
\end{aligned}
$$

- La ecuación de Bellman es una ecuación funcional recursiva.
    - Es una ecuación funcional porque las incógnitas, las funciones valor V_t, son funciones, no vectores en $\Re^n$.
    - Es recursiva porque V_t está definida en términos de V_{t+1}.
- La ecuación de Bellman captura de manera compacta la disyuntiva fundamental que enfrenta un agente racional que optimiza dinámicamente tomando en cuenta el futuro, entre la recompensa inmediata $f_t(s_t, x_t)$ y las recompensas futuras esperadas $\delta \mathbb{E}_t V_{t+1}(s_{t+1})$.

Resolviendo la ecuación de Bellman, problema de horizonte finito

- Como la ecuación de Bellman es recursiva, necesitamos saber V_{t+1} para encontrar V_t.
- Pero en el problema de horizonte finito, siguiendo la recursión:

$$\begin{aligned}
V_t(s_t) &= \max_{x_t \in X(s_t)} \left\{ f_t(s_t, x_t) + \delta\, \mathbb{E}_t\, V_{t+1}(s_{t+1}) \right\} \\
V_{t+1}(s_{t+1}) &= \max_{x_{t+1} \in X(s_{t+1})} \left\{ f_{t+1}(s_{t+1}, x_{t+1}) + \delta\, \mathbb{E}_{t+1}\, V_{t+2}(s_{t+2}) \right\} \\
&\vdots \\
V_{T-1}(s_{T-1}) &= \max_{x_{T-1} \in X(s_{T-1})} \left\{ f_{T-1}(s_{T-1}, x_{T-1}) + \delta\, \mathbb{E}_{T-1}\, V_T(s_T) \right\} \\
V_T(s_T) &= \max_{x_T \in X(s_T)} \left\{ f_T(s_T, x_T) + \delta\, \mathbb{E}_T\, V_{T+1}(s_{T+1}) \right\}
\end{aligned}$$

una vez que especifiquemos el valor terminal V_{T+1}, podemos resolver para V_t por inducción hacia atrás.

Estacionariedad

- Un modelo de decisión de Markov en tiempo discreto y con horizonte infinito es estacionario si la función de recompensa, función de transición, y la distribución de los choques son independientes del tiempo t.
- En este caso, ni la función valor ni la función de política óptima dependerán del tiempo t.
- Así, la ecuación de Bellman tiene la forma de una ecuación funcional de punto fijo cuya única incógnita es la función valor estacionaria V:

$$V(s) = \max_{x \in X(s)} \{f(s,x) + \delta \, \mathbb{E}_\epsilon \, V(g(s,x,\epsilon))\}, \qquad s \in S.$$

- Es una ecuación funcional de punto fijo porque define a la función valor desconocida V en términos de sí misma.

Existencia de una solución

Por el teorema de mapeo de contracción, la ecuación de Bellman de un modelo estacionario de decisión de Markov de tiempo discreto y horizonte infinito posee una única solución si el factor de descuento δ es menor a uno y la función de recompensa f está acotada.

4. Método de colocación

Método de colocación

- Ahora estudiaremos cómo resolver ecuaciones de Bellman vía colocación.
- Por simplicidad, limitamos nuestra discusión introductoria a modelos de horizonte infinito con un espacio de estados de una dimensión.
- No obstante, esta estrategia se puede generalizar a modelos de horizonte finito y a espacios de estados más generales.

- Para computar una solución aproximada para la ecuación de Bellman por colocación:
- Aproximamos la función valor con una combinación lineal de n funciones base conocidas $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$

$$V(s) \approx \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(s)$$

y fijamos los coeficientes de las funciones base $c_1, c_2, \dots, c_n$ requiriendo que la función valor aproximante satisfaga la ecuación de Bellman, no en todos los posibles estados, sino en n nodos de colocación escogidos apropiadamente $s_1, s_2, \dots, s_n$ in S.

- La colocación reemplaza la ecuación de Bellman con un sistema de n ecuaciones no lineales

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(s_i)}_{V(s_i)} = \max_x \left\{ f(s_i, x) + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j \left[g(s_i, x, \epsilon) \right]}_{V[g(s_i,x,\epsilon)]} \right\}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ (una ecuación por nodo) en las n incógnitas c_j, $j = 1, 2, \dots, n$ (un coeficiente por función base).

- El sistema de ecuaciones no lineales puede expresarse de manera compacta en forma vectorial como la ecuación de colocación

$$\Phi c = v(c)$$

cuya incógnita es el vector de coeficientes base c.

- Acá, Φ es la matriz $n \times n$ cuyo elemento típico

$$\Phi_{ij} = \phi_j(s_i)$$

  es la j-ésima función base evaluada en el nodo i-ésimo.
- Y v es la función de $\Re^n$ a $\Re^n$ cuyo elemento típico

$$v_i(c) = \max_{x \in X(s_i)} \{f(s_i, x) + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(g(s_i, x, \epsilon))\},$$

  es el valor óptimo del problema de maximización incrustado en la ecuación de Bellman en el i-ésimo nodo de colocación, remplazando la función valor con su aproximante.

- La ecuación de colocación puede resolverse usando una variedad de métodos de solución de ecuaciones no lineales.
- Por ejemplo, podemos escribir la ecuación de colocación como un problema de punto fijo

$$c = \Phi^{-1} v(c)$$

y resolverla para c usando iteración de funciones

$$c \leftarrow \Phi^{-1} v(c).$$

- Alternativamente, podemos escribir la ecuación de colocación como un problema de búsqueda de raíces

$$\Phi c - v(c) = 0$$

y resolverla para c usando el método de Newton

$$c \leftarrow c - [\Phi - v'(c)]^{-1}[\Phi c - v(c)].$$

- Aquí, $v'(c)$ es la matriz $n \times n$ jacobiana de v en c, cuyo elemento típico puede ser computado usando el teorema de la envolvente:

$$v'_{ij}(c) = \frac{\partial v_i}{\partial c_j}(c) = \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, \phi_j\left[g(s_i, x_i, \epsilon)\right].$$

- Podemos también usar el método de Broyden en vez del método de Newton.

Evaluando la precisión de la solución

- La precisión de la solución aproximada computada es evaluada inspeccionando el residuo.
- Dado un vector de coeficientes base c, el residuo es una función de la variable de estado s:

$$R_c(s) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(s) - \max_x \{f(s,x) + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j \left[g(s,x,\epsilon)\right]\}$$

- Si el aproximante fuera exacto, el residuo sería cero en todas partes.
- Sin embargo, en general, el residuo no será cero, excepto en los nodos de colocación, donde es cero por construcción.
- La precisión del aproximante se mide por cuánto difiere el residuo de cero en estados distintos de los nodos.

Más fácil decirlo que hacerlo...

- La discusión anterior es general, pero oscurece algunos puntos prácticos:
  - Primero, los espacios de estado y de acción pueden ser multidimensionales e incluir una mezcla de variables continuas y discretas.
  - Segundo, evaluar v require de una operación de maximización no lineal de dimensión finita , de la cual hemos dicho muy poco.
  - Tercero, resolver la ecuación de colocación requiere una estimación inicial de los coeficientes desconocidos.
- Las primeras dos complicaciones son manejadas de manera directa po rel paquete CompEcon.
- Pero el álgebra es engorroso y requiere una indexación multidimensional, que hemos elegido evitar por claridad.

Decisiones prácticas

- Cuando aplicamos el método de colocación enfrentamos algunas decisiones prácticas:
  - Primero, escoger las funciones base y los nodos de colocación.
  - Segundo, escoger el algoritmo para resolver la ecuación de colocación.
  - Tercero, escoger la técnica de cuadratura numérica, de ser necesario.
  - Cuarto, proveer la estimación inicial de los coeficientes base.
- En la práctica podemos probar diferentes familias de nodos base, diferentes grados de discretización, diferentes algoritmos de solución y diferentes conjeturas iniciales para los coeficientes para asegurar la solidez de los resultados.
- ąSiempre, siempre, siempre debemos revisar los residuos!

La maldición de la dimensionalidad en el método de colocación

- El método de colocación sufre de la maldición de la dimensionalidad.
- Específicamente, el esfuerzo computacional requerido crece exponencialmente con la dimensión del espacio de estados.
- Por ejemplo, si el espacio de estados tiene d dimensiones continuas y escogemos n funciones base para cada variable de estado, entonces la ecuación de colocación tendría n^d ecuaciones individuales y el mismo número de incógnitas.
- Por esta razón, en la práctica la limitación principal para resolver problemas de optimización dinámica numéricamente es mantener manejable la dimensión del estado.

5. Ejemplos con acción discreta

Modelo 1:
Cosecha forestal

dp/01a Timber Harvesting -- 2 nodes, dp/01b Timber Harvesting -- cubic spline

MODELO 1: Cosecha forestal

- Al inicio de cada periodo t, el dueño de una finca forestal observa la biomasa de su finca s_t y debe decidir si cultivarla y venderla, o dejarla que crezca un período más.
- El ingreso que recibe por unidad de biomasa es una constante p y el costo de talar y replantar es una constante κ.
- Una finca con biomasa s_t que no es talada en t tendrá biomasa $s_{t+1} = h(s_t)$ el siguiente período; una finca que es talada tendrá biomasa $s_{t+1} = h(0) > 0$.
- £Qué política de talado maximiza el valor de la finca?

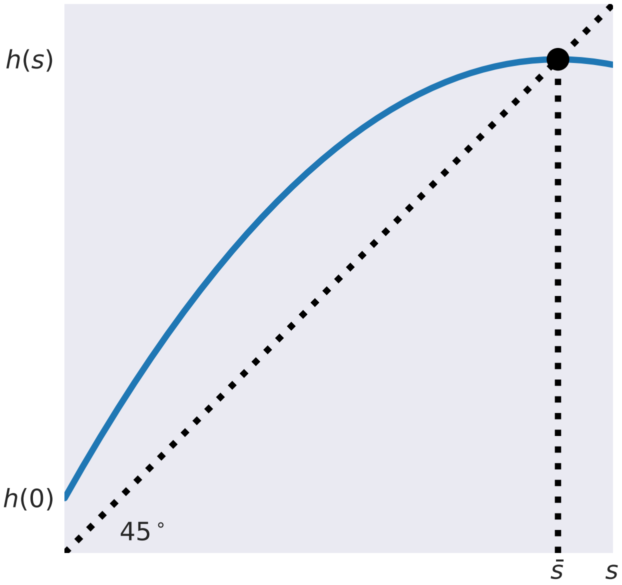


Figura 8.1: Función de crecimiento de la biomasa

Formulación

Este es un modelo determinístico de horizonte infinito, con las siguientes características estructurales:

- Una variable de estado continua, la cantidad de biomasa

  $$s_t \in [0, \bar{s}],$$

  donde $\bar{s}$ es la máxima biomasa alcanzable.
- Una variable de acción binaria, la decisión de talar

  $$j_t = \begin{cases} 1, & \text{talar la finca} \\ 0, & \text{no hacerlo.} \end{cases}$$

- La recompensa es la ganancia actual

$$\pi_t = \begin{cases} 0, & \text{si } j_t = 0 \\ ps_t - \kappa, & \text{si } j_t = 1 \end{cases}$$

  donde $p > 0$ y $\kappa > 0$.
- La transición del estado está descrita por

$$s_{t+1} = \begin{cases} h(s_t), & \text{si } j_t = 0 \\ h(0), & \text{si } j_t = 1 \end{cases}$$

  donde $h(0) > 0$, $h' > 0$ y $h'' < 0$ para $s \in [0, \bar{s}]$, $h(\bar{s}) = \bar{s}$.

Ecuación de Bellman

El valor de una finca con biomasa s satisface la ecuación de Bellman

$$V(s) = \max\{\underbrace{\delta V[h(s)]}_{\text{no tala}}, \qquad \underbrace{ps - \kappa + \delta V[h(0)]}_{\text{tala}}\}$$

Aquí,

- Si el dueño no tala la finca, no obtiene ganancia y empieza el siguiente período con una finca con biomasa $h(s)$ valorada en $V[h(s)]$.
- Si el dueño tala la finca, obtiene $ps - \kappa$ de ganancia y empieza el siguiente período con una finca con biomasa $h(0)$ valorada en $V[h(0)]$.

Alternativamente, la ecuación de Bellman puede escribirse

$$V(s) = \max\{\underbrace{V_0(s)}_{\text{no tala}}, \qquad \underbrace{V_1(s)}_{\text{tala}}\}$$

donde

$$\begin{aligned} V_0(s) &\equiv \delta V[h(s)] \\ V_1(s) &\equiv ps - \kappa + \delta V[h(0)] \end{aligned}$$

son las funciones valor contingentes en la acción, las cuales dan los valores contingentes en no talar y talar, respectivamente.

- El dueño de la finca tala la finca si

$$V_1(s) > V_0(s)$$

o, equivalentemente, si

$$ps - \kappa > \delta \left\{ V[h(s)] - V[h(0)] \right\}.$$

- Es decir, el dueño tala y replanta si el ingreso neto de este período excede la pérdida de capital del valor de la finca.
- Un dueño miope que tala simplemente si el ingreso neto es positivo talará antes de que sea apropiado.
- La biomasa crítica s^* a la cual la finca debe ser talada está caracterizada por $V_0(s^*) = V_1(s^*)$.

- El método de colocación requiere que la función valor sea aproximada con una combinación lineal de n funciones base ϕ_k:

$$V(s) \approx \hat{V}(s) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(s).$$

- Los n coeficientes c_k se fijan requiriendo que la función valor aproximada satisfaga la ecuación de Bellman en n nodos s_i escogidos apropiadamente.

Esto requiere resolver las n ecuaciones de colocación

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(s_i)}_{V(s_i)} = \max\left\{ \underbrace{\delta \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(h(s_i))}_{\text{no tala}}, \quad \underbrace{ps_i - \kappa + \delta \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(h(0))}_{\text{tala}} \right\},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ (una ecuación por nodo), para los n coeficientes base desconocidos c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 1:

Cosecha forestal, aproximación lineal

dp/01a Timber Harvesting--2 nodes

- Resolvamos el modelo numéricamente con esta parametrización
    - $h(s) = s + \gamma(\bar{s} - s)$, $\bar{s} = 0.5$, $\gamma = 0.1$
    - $p = 1$
    - $\kappa = 0.2$
    - $\delta = 0.9$

Computando una aproximación lineal "a mano"

- Para entender mejor el método de colocación, empecemos construyendo una aproximación lineal de la función valor:

$$V(s) \approx \hat{V}(s) \equiv c_1 + c_2 s.$$

- Dados los dos nodos de colocación s_1 y s_2, las dos ecuaciones de colocación son

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 s_1 &= \max\left\{\delta(c_1 + c_2 h(s_1)), \quad p s_1 - \kappa + \delta(c_1 + c_2 h(0))\right\} \\
c_1 + c_2 s_2 &= \max\left\{\delta(c_1 + c_2 h(s_2)), \quad p s_2 - \kappa + \delta(c_1 + c_2 h(0))\right\}.
\end{aligned}$$

- Si escogemos $s_1 = 0.2$ y $s_2 = 0.4$, insertamos todos los parámetros, y simplificamos, entonces

$$\begin{aligned} c_1 + 0.2c_2 &= \max\left\{0.9c_1 + 0.207c_2, \quad 0.0 + 0.9c_1 + 0.225c_2\right\} \\ c_1 + 0.4c_2 &= \max\left\{0.9c_1 + 0.369c_2, \quad 0.3 + 0.9c_1 + 0.405c_2\right\}. \end{aligned}$$

- Aunque engorroso, estas dos ecuaciones no lineales pueden resolverse explícitamente para c_1 y c_2, resultando en la función valor aproximada

$$\hat{V}(s) \equiv 0.0387 + 0.5525s.$$

- Luego podemos derivar aproximaciones para las funciones valor condicionales

$$\begin{aligned} \hat{V}_0(s) &= \delta \hat{V}(h(s)) && = -0.0597 + 0.4475s \\ \hat{V}_1(s) &= ps - \kappa + \delta \hat{V}(h(0)) && = -0.1403 + s. \end{aligned}$$

- Igualando las dos partes obtenemos el nivel de biomasa crítica $s^* = 0.36$ al cual la finca debe ser talada.

- Abramos el cuaderno de Jupyter `dp/01a Timber Harvesting--2 nodes`, el cual ya tiene los parámetros del modelo:

```
price = 1.0  # precio de biomasa
kappa = 0.2  # costo de talar y replantar
smax  = 0.5  # capacidad máxima de la finca
gamma = 0.1  # parámetro de crecimiento de la biomas
delta = 0.9  # factor de descuento
```

- El cuaderno también contiene algún código que genera gráficos y otros resultados.

Para resolver la ecuación de colocación en Python,

Paso 1: codificamos el función de crecimiento

```
def h(s): return s + gamma*(smax - s)
```

Paso 2: codificamos el aproximante de la función valor

```
def vhat(c, s): return c[0] + c[1]*s
```

Paso 3: codificamos las funciones valor condicionales

```
def vhat1(c,s):
    return price*s - kappa + delta * vhat(c,h(0))
def vhat0(c,s):
    return delta * vhat(c, h(s))
```

Paso 4: y codificamos el residuo

```
def resid(c,s=snodes):
    return vhat(c,s) - np.maximum(vhat0(c,s),vhat1(c,s))
```

Paso 5: Resolvemos la ecuación de colocación con dos nodos de colocación

```
snodes = np.array([0.2, 0.4])
cc = NLP(resid).broyden(np.zeros(2))
```

Paso 6: Computamos la biomasa crítica

```
scrit = NLP(lambda s: vhat0(cc,s)-vhat1(cc,s)). \
        broyden(0.0)[0]
```

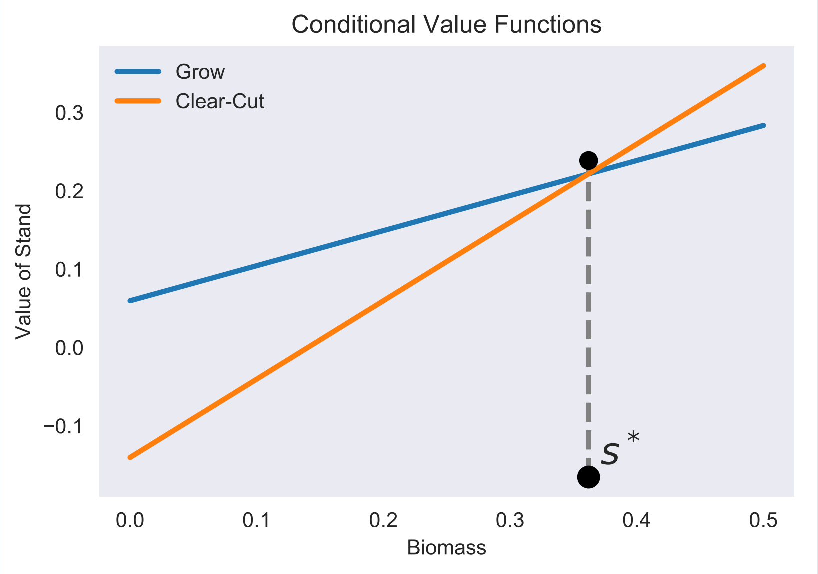


Figura 8.2: Funciones valor condicionales y biomasa crítica, 2 funciones base

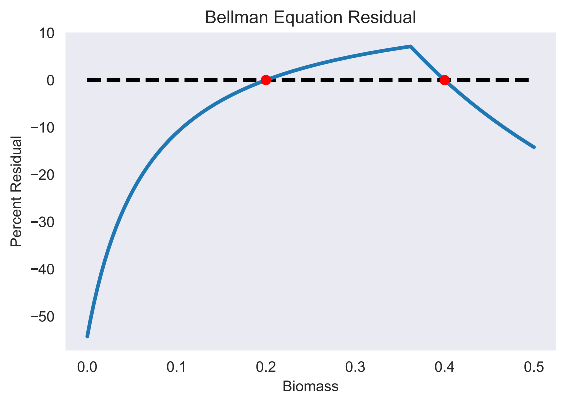


Figura 8.3: Residuos de la ecuación de Bellman, 2 funciones base

- Los residuos de la ecuación de Bellman alcanzan magnitudes cercanas al 35 por ciento del valor subyacente, lo que es inaceptablemente alto.

Ejemplo 2:
Cosecha forestal, aproximación con spline cúbico

`dp/01b Timber Harvesting--spline cúbico`

Ahora resolvamos el modelo usando un spline cúbico de 200 funciones base.

Paso 1: codificamos la función de crecimiento

```
def h(s): return s + gamma*(smax - s)
```

Paso 2: codificamos el aproximante de la función valor

```
ns = 200
vhat = BasisSpline(ns,0,smax,k=3)
```

Paso 3: codificamos las funciones valor condicionales

```
def vhat1(s):
    return price*s - kappa + delta * vhat(h(0))
def vhat0(s):
    return delta * vhat(h(s))
```

Paso 4: y codificamos el residuo

```
def resid(c,s=vhat.nodes):
    vhat.c = c
    return vhat(s) - np.maximum(vhat0(s), vhat1(s))
```

Paso 5: Resolvemos la ecuación de colocación

```
cc = NLP(resid).broyden(vhat.c)
```

Paso 6: Computamos la biomasa crítica

```
scrit = NLP(lambda s: vhat0(s)-vhat1(s)).broyden(0.0)[0]
```

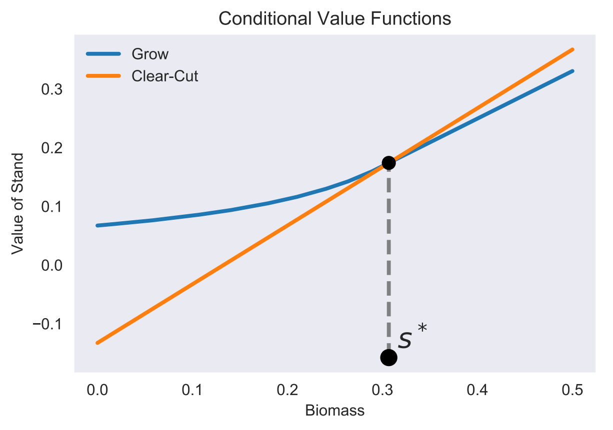


Figura 8.4: Funciones valor condicionales y biomasa crítica, 200 funciones base

El nivel computado de biomasa crítica al cual la finca debe ser talada es $s^* = 0.31$.

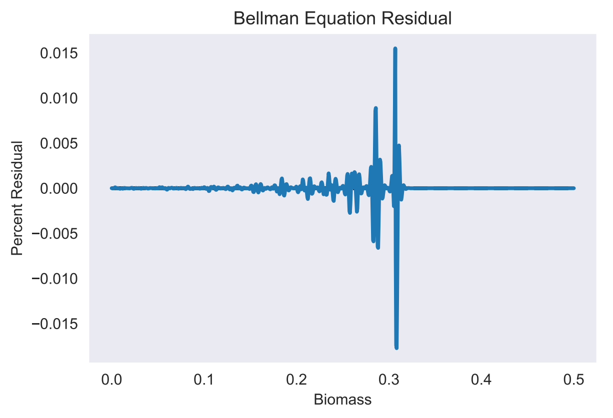


Figura 8.5: Residuos de la ecuación de Bellman, 200 funciones base

Los residuos de la ecuación de Bellman aproximada con 200 splines cúbicos alcanza magnitudes de alrededor de 0.02 por ciento, cuatro órdenes de magnitud mejor que con dos funciones base.

El nivel crítico de biomasa y el ciclo de rotación son 0.31 y 10 períodos, respectivamente. £Cómo cambian estos valores si…

escenario base	0.31	10
el precio de mercado cae a la mitad?	0.44	21
se impone un impuesto unitario de 0.2 a la venta de madera?	0.35	12
costo de talar y replantar cae a la mitad?	0.21	6
se impone un impuesto de 0.1 en la tala?	0.38	14

£Como adaptaría usted el modelo y el código para contemplar una probabilidad q de que un incendio destruya la madera en un período dado?

Modelo 2:
Reemplazo de activos

dp/02 Asset Replacement Model

MODELO 2: Reemplazo de activos

- Al inicio de cada período t, un fabricante observa la antigüedad de un activo a_t y debe decidir si reemplazalo con uno nuevo.
- Un activo que tiene a períodos de antigüedad produce $q(a)$ unidades de producto.
- Regulaciones de seguridad exigen que todo activo que alcance una antigüedad de A períodos sea reemplazado.
- El costo neto de liquidar un activo viejo y comprar uno nuevo es una constante κ.
- El activo genera una ganancia neta p_t por unidad producida en t, ganancia que evoluciona según $p_{t+1} = h(p_t, \epsilon_{t+1})$ donde los ϵ son choques i.i.d.
- £Qué política de reemplazo maximiza las ganancias del fabricante?

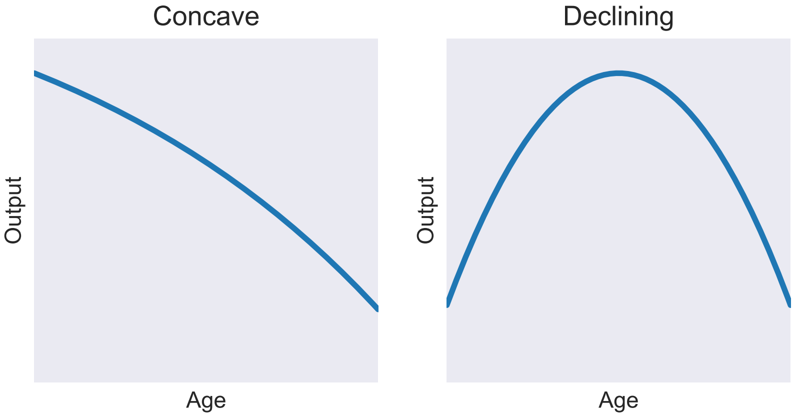


Figura 8.6: Productividad de un activo

Este es un modelo estocástico de horizonte infinito, con las siguientes características estructurales:

- Una variable de estado continua, la ganancia neta por unidad

$$p_t \in (0, \infty),$$

  y una variable de estado discreta, la antigüedad del activo

$$a_t \in \{1, 2, 3, \ldots, A\}.$$

- Una variable de acción binaria, la decisión de reemplazar

$$j_t = \begin{cases} 1 & \text{reemplar el activo} \\ 0 & \text{conservarlo,} \end{cases}$$

  que está sujeta a la restricción de que $j_t = 1$ si $a_t = A$.

- La recompensa es la ganancia actual

$$\pi_t = \begin{cases} p_t q(a_t), & \text{si } j_t = 0 \\ p_t q(0) - \kappa, & \text{si } j_t = 1. \end{cases}$$

- La transición de los estados está descrita por

$$p_{t+1} = h(p_t, \epsilon_{t+1})$$

$$a_{t+1} = \begin{cases} a_t + 1, & \text{si } j_t = 0 \\ 1, & \text{si } j_t = 1. \end{cases}$$

El valor de poseer un activo con antigüedad a, dada la ganancia neta por unidad p, satisface la ecuación de Bellman

$$V_a(p) = \max\{ \underbrace{V_{a0}(p)}_{\text{conservarlo}}, \quad \underbrace{V_{a1}(p)}_{\text{reemplazarlo}} \}$$

donde

$$\begin{aligned} V_{a0}(p) &\equiv pq(a) + \delta E_\epsilon V_{a+1}(h(p,\epsilon)) \\ V_{a1}(p) &\equiv pq(0) - \kappa + \delta E_\epsilon V_1(h(p,\epsilon)) \end{aligned}$$

son los valores contingentes de conservar y reemplar un activo con antigüedad a, respectivamente.

- Si el fabricante conserva un activo con antigüedad a, gana $pq(a)$ y empieza el siguiente período con un activo un período más viejo valorado en $V_{a+1}(\tilde{p})$, donde $\tilde{p}$ es la ganancia unitaria neta del siguiente período.
- Por otra parte, si reemplaza el activo, gana $pq(0) - \kappa$ y empieza el siguiente período con un activo con un período de antigüedad valorado en $V_1(\tilde{p})$.

- El fabricante reemplaza el activo si

$$p(q(0)-q(a))-\kappa > \delta E_{\epsilon}\left(V_{a+1}(\tilde{p})-V_1(\tilde{p})\right),$$

es decir, si la ganancia neta del período actual excede la pérdida esperada de capital.
- Un fabricante miope que reemplaza el activo simplemente si la ganancia neta es positiva reemplazará el activo demasiado pronto o tarde, dependienco de si la pérdida esperada de capital es positiva o negativa.
- La ganancia neta por unidad crítica p_a^* a la cual se reemplaza un activo con antigüedad a está caracterizada por $V_{a0}(p_a^*) = V_{a1}(p_a^*)$.

Solución numérica

- El método de colocación requiere que la función valor sea aproximada con una combinación lineal de n funciones base ϕ_k:

$$V_a(p) \approx \hat{V}_a(p) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_{ak}\phi_k(p).$$

- Los $A \times n$ coeficientes c_{ak} se fijan requiriendo que la función valor aproximada satisfaga la ecuación de Bellman en n nodos p_i escogidos apropiadamente .

Esto requiere resolver las $A \times n$ nonlinear ecuaciones de colocación

$$\hat{V}_a(p_i) \equiv \max\{ \underbrace{\hat{V}_{a0}(p_i)}_{\text{conservarlo}}, \quad \underbrace{\hat{V}_{a1}(p_i)}_{\text{reemplazarlo}} \},$$

$a = 1, 2, \ldots, A$, $i = 1, 2, \ldots, n$, donde

$$\begin{aligned} \hat{V}_{a0}(p_i) &= p_i\, q(a) + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, \hat{V}_{a+1}(h(p_i, \epsilon)) \\ \hat{V}_{a1}(p_i) &= p_i\ q(0) - \kappa + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, \hat{V}_1(h(p_i, \epsilon)) \end{aligned}$$

para los $A \times n$ coeficientes base desconocidos c_{ak}, $a = 1, 2, \ldots, A$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 3:
Asset replacement

dp/02 Asset Replacement Model

- Resolvamos el modelo numéricamente, asumiendo que
  - $q(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2$, $\alpha_0 = 50$, $\alpha_1 = -2.5$, $\alpha_2 = -2.5$;
  - $h(p, \epsilon) = \bar{p} + \gamma(p - \bar{p}) + \epsilon$, $\bar{p} = 1$, $\gamma = 0.5$;
  - ϵ serialmente i.i.d. normales, media 0, desviación estándar $\sigma = 0.15$;
  - $A = 6$, $\kappa = 40$, $\delta = 0.9$.
- Aproximamos la función valor con una combinación lineal de $n = 200$ spline cúbicos definidos en el intervalo $[0, 2]$.
- El choque a la ganancia unitaria ϵ lo discretizamos usando un esquema de cuadratura de Gauss de $m = 5$ nodos.

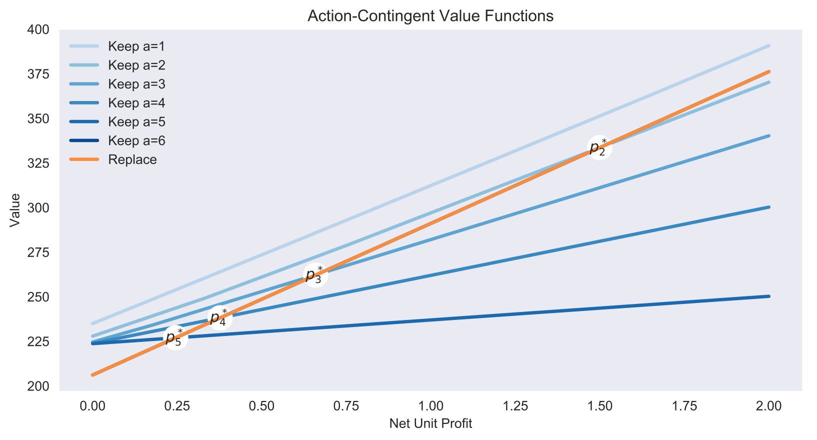


Figura 8.7: Funciones valor condicionales y ganancia unitaria crítica, por antigüedad del activo

- La ganancia unitaria crítica a la cual el activo debe ser reemplazado es 1.50, 0.66, 0.38, and 0.25, para activos con antigüedad de 2, 3, 4, and 5, respectivamente (un activo de un período de antigüedad nunca se reemplaza).
- Las ganancias unitarias críticas p_a^* las computamos numéricamente resolviendo $\hat{V}_{a0}(p_a^*) = \hat{V}_{a1}(p_a^*)$.

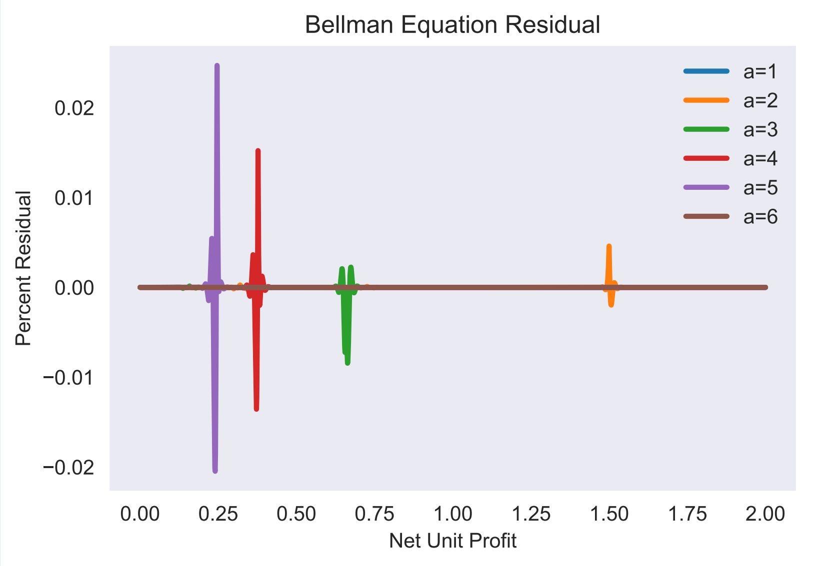


Figura 8.8: Residuos de la ecuación de Bellman

Análisis paramétrico

La antigüedad promedio de un activo en los primeros 50 períodos es de 2.01. £Cómo cambia este valor si…

escenario base	2.01
costo de remplazo baja a la mitad?	1.61
ganancia media de largo plazo aumenta 20%?	1.99
fabricante descuenta menos el futuro ($\delta = 0.95$)?	2.00

£Cómo adaptaría usted el modelo y el código para considerar el caso en que se puede invertir para mejorar la productividad del activo?

Modelo 3:
Entrada y salida de una industria

dp/03 Industry Entry-Exit Model

MODEL 3: Entrada y salida de una industria

- Al comienzo de cada período t, una empresa observa su potencial ganancia del período actual p_t, el cual puede ser negativo, y debe decidir si operar o no.
- La empresa no enfrenta costos fijos ni de cierre, pero incurre un costo de puesta en marcha κ si reabre luego de un período de inactividad.
- La ganancia potencial de corto plazo evoluciona según $p_{t+1} = h(p_t, \epsilon_{t+1})$ donde los ϵ son perturbaciones serialmente i.i.d.
- £Cuál política de entrada-salida maximiza el valor de la empresa?

Formulación

Este es un modelo estocástico de horizonte infinito, con las siguientes característica estructurales:

- Una variable de estado continua, la ganancia potencial

  $$p_t \in (-\infty, \infty),$$

  y una variable de estado binaria, el estado operativo de la empresa en el período anterior

  $$i_t = \begin{cases} 1 & \text{active} \\ 0 & \text{idle.} \end{cases}$$

- Una variable de acción binaria, el estado operativo de la empresa en este período

  $$j_t = \begin{cases} 1 & \text{active} \\ 0 & \text{idle.} \end{cases}$$

- La recompensa es la ganancia neta actual

$$\pi_t = p_t j_t - \kappa(1 - i_t) j_t.$$

- Las transiciones de los estados se rigen por

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= h(p_t, \epsilon_{t+1}) \\ i_{t+1} &= j_t. \end{aligned}$$

Ecuación de Bellman

El valor de la empresa, dado el estado operativo i y la ganancia potencial p, satisface la ecuación de Bellman

$$V_i(p) = \max\{\underbrace{V_{i0}(p)}_{\text{ociosa}}, \quad \underbrace{V_{i1}(p)}_{\text{activa}}\}$$

donde

$$\begin{aligned} V_{i0}(p) &\equiv \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, V_0(h(p,\epsilon)) \\ V_{i1}(p) &\equiv p - \kappa(1-i) + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, V_1(h(p,\epsilon)) \end{aligned}$$

son los valores contingentes en estar activa u ocioso en este período, respectivamente.

- Una empresa ociosa no devenga ganancias y comienza el siguiente período con un valor $V_0(\tilde{p})$, donde $\tilde{p}$ es la ganancia potencial del siguiente período.
- Una empresa activa, en contraste, obtiene ganancias p, incurriendo una costo de arranque κ si estuvo ociosa el período anterior, y comienza el siguiente período con un valor $V_1(\tilde{p})$.
- La ganancia potencial crítica a la cual una empresa ociosa reabre, p_0^*, y a la cual una empresa activa cierra, p_1^*, están caracterizadas por $V_{i0}(p_i^*) = V_{i1}(p_i^*)$, para $i = 0, 1$.

- Una empresa ociosa reabre si

$$p + V^*(p) > \kappa,$$

mientras que una empresa activa se mantiene en operación si

$$p + V^*(p) > 0,$$

donde

$$V^*(p) \equiv \delta\, \mathbb{E}_\epsilon \left(V_1(h(p,\epsilon)) - V_0(h(p,\epsilon))\right) > 0,$$

es el valor de la opción de estar activo.

- Como $V^*(p) > 0$, una empresa ociosa puede reabrir y una empresa activa puede permanecer abierta, aun cuanto tenga pérdidas en el corto plazo.

Solución numérica

- El método de colocación requiere que la función valor sea aproximada con una combinación lineal de n funciones base ϕ_k:
$$V_i(p) \approx \hat{V}_i(p) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\phi_k(p).$$
- Los $2 \times n$ coeficientes c_{ik} se fijan requiriendo que la aproximación de la función valor satisfaga la ecuación de Bellman en n nodos p_k escogidos apropiadamente.

Esto requiere resolver las $2 \times n$ ecuaciones no lineales de colocación

$$\hat{V}_i(p_k) \equiv \max\{\underset{\text{ociosa}}{\hat{V}_{i0}(p_k)}, \quad \underset{\text{activa}}{\hat{V}_{i1}(p_k)}\},$$

$i = 0, 1,\ k = 1, 2, \ldots, n$, donde

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{i0}(p_k) &= \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, \hat{V}_0(h(p_k, \epsilon)) \\
\hat{V}_{i1}(p_k) &= p_k - \kappa(1 - i) + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, \hat{V}_1(h(p_k, \epsilon)),
\end{aligned}$$

para los $2 \times n$ coeficientes base c_{ik}, $i = 0, 1,\ k = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 4:
Entrada y salida de una industria

- En el cuaderno `dp/03 Industry Entry-Exit Model` resolvemos este modelo asumiendo
  - $h(p, \epsilon) = \bar{p} + \gamma(p - \bar{p}) + \epsilon$, $\bar{p} = 1$, $\gamma = 0.7$;
  - ϵ serialmente i.i.d. normal, media cero, desviación estándar $\sigma = 1$;
  - $\kappa = 10$, $\delta = 0.9$.
- La función valor es aproximada con una combinación lineal de $n = 250$ splines cúbicos en $[-20, 20]$.
- La perturbación a las ganancias ϵ se discretiza usando un esquema de cuadratura de Gauss con $m = 5$ nodos.

Una empresa ociosa reabre en $p_0^* = 2.10$ y una empresa activa cierra en $p_1^* = -2.30$.

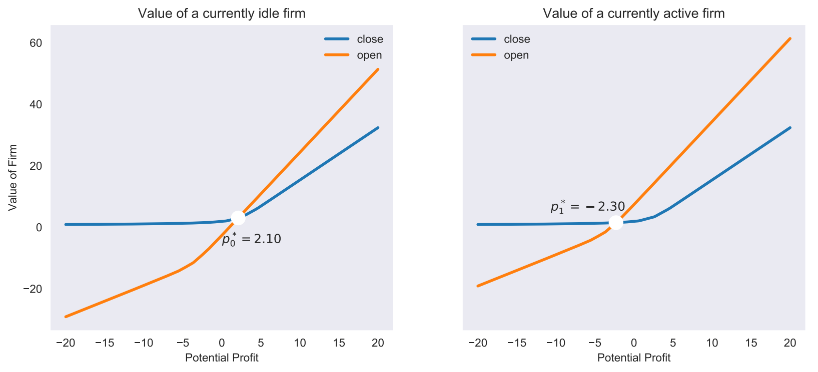


Figura 8.9: Funciones de valor condicionales y ganancias críticas de corto plazo

La probabilidad ergódica de operación, es decir, el porcentaje de períodos que la empresa está activa en el largo plazo, es 92%.

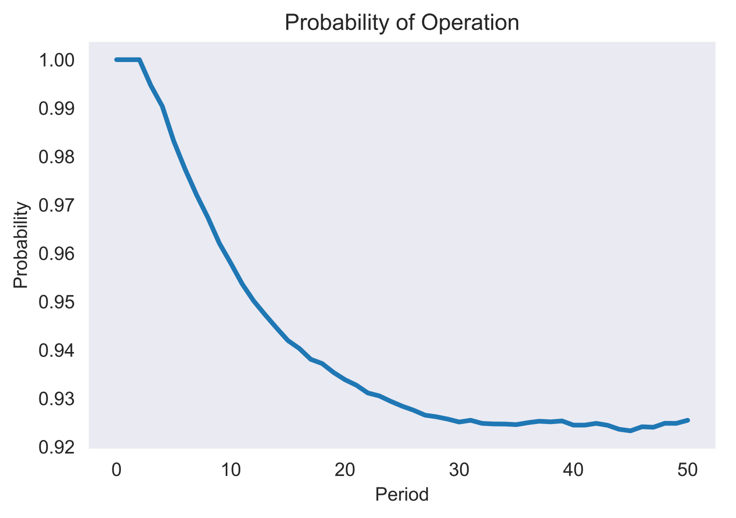


Figura 8.10: Probabilidad de operación

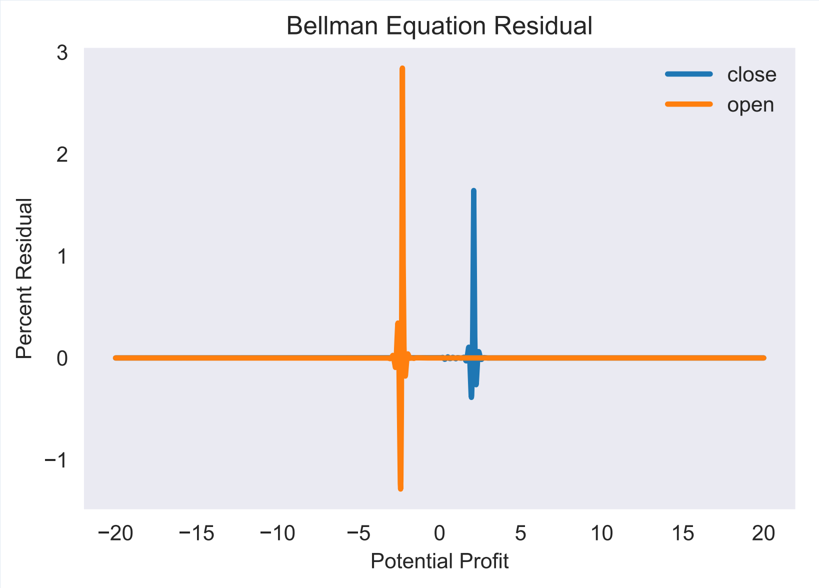


Figura 8.11: Residuos de la ecuación de Bellman

Análisis paramétrico

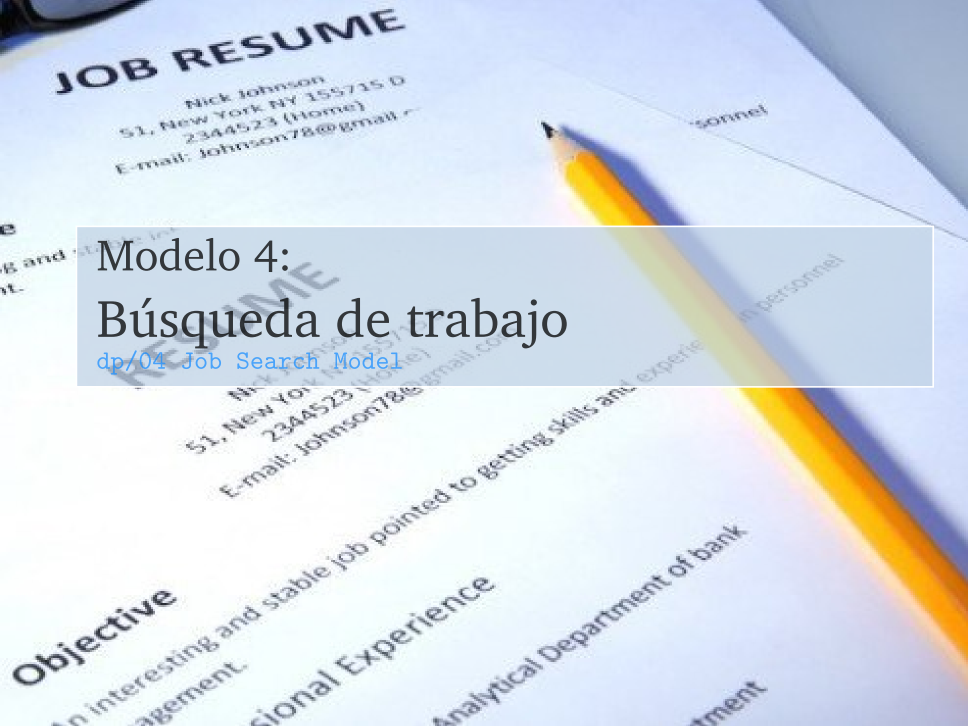
- £Cómo cambia la probabilidad ergódica de operación si...

escenario base	94%
la ganancia media de largo plazo cae a la mitad?	65%
se duplica el costo de reabrir una empresa ociosa?	95%
se duplica la desviación estándar de los shocks?	69%

- £Cómo adaptaría usted el modelo y el código para permitir que los costos fijos y de cierre dependieran de si la empresa está activa u ociosa?

Modelo 4:
Búsqueda de trabajo

dp/04 Job Search Model



MODELO 4: Búsqueda de trabajo

- Al inicio de cada período t, un trabajador inmortal está empleado o desempleado.
- Si está empleado, debe decidir si continuar trabajando al salario actual w_t o renunciar y quedar ocioso.
- Si está desempleado, debe decidir si buscar un trabajo y recibir un beneficio de desempleo u o quedarse ocioso.
- Un trabajador ocioso no recibe ni salario ni beneficio de desempleo, pero disfruta de un beneficio puro de ocio v.

- Un trabajador desempleado que que busca trabajo lo encontrará el siguiente período con probabilidad p_0.
- Un trabajador empleado que trabaja mantendrá su empleo el siguiente período con probabilidad p_1.
- El salario evoluciona según $w_{t+1} = h(w_t, \epsilon_{t+1})$, donde los ϵ son perturbaciones serialmente i.i.d.
- £Bajo qué condiciones renunciará un trabajador ocupado o buscará trabajo uno desempleado?

Este es un modelo estocástico de horizonte infinito, con la siguiente estructura:

- Una variable de estado continua, el salario actual

$$w_t \in [0, \infty),$$

  u una variable binaria de estado, el estado laboral del trabajador

$$i_t = \begin{cases} 1 & \text{empleado} \\ 0 & \text{desempleado.} \end{cases}$$

- Una variable de acción binaria, la actividad del trabajador este período

$$j_t = \begin{cases} 1 & \text{activo (trabajando o buscando)} \\ 0 & \text{ocioso.} \end{cases}$$

- La recompensa es el beneficio actual

$$\pi_t = w_t i_t j_t + u(1 - i_t) j_t + v(1 - j_t).$$

- La transición de los estados se rige por

$$
\begin{aligned}
w_{t+1} &= h(w_t, \epsilon_{t+1}) \\
i_{t+1} &= \begin{cases}
0 \text{ con probabilidad } 1, & \text{si } j_t = 0 \\
1 \text{ con probabilidad } p_0, & \text{si } j_t = 1, i_t = 0 \\
0 \text{ con probabilidad } 1 - p_0, & \text{si } j_t = 1, i_t = 0 \\
1 \text{ con probabilidad } p_1, & \text{si } j_t = 1, i_t = 1 \\
0 \text{ con probabilidad } 1 - p_1, & \text{si } j_t = 1, i_t = 1
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Ecuación de Bellman

Los beneficios vitalicios esperados del trabajador, dado su estado laboral i y el salario actual w, satisface la ecuación de Bellman

$$V_i(w) = \max\{\underbrace{V_{i0}(w)}_{\text{ocioso}}, \quad \underbrace{V_{i1}(w)}_{\text{activo}}\}$$

donde

$$\begin{aligned} V_{i0}(w) &\equiv v + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, V_0(h(w,\epsilon)) \\ V_{i1}(w) &\equiv wi + u(1-i) + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon \left[p_i V_1(h(w,\epsilon)) + (1-p_i) V_0(h(w,\epsilon)) \right] \end{aligned}$$

son los valores contingentes de estar ocioso y activo, respectivamente.

- Un trabajador ocioso solo gana el beneficio del ocio y comienza el siguiente periodo con valor $V_0(\tilde{w})$, donde $\tilde{w}$ es el salario del siguiente período.
- Un trabajador desempleado activo recibe el beneficio de desempleo u y comienza el siguiente período con un valor $V_0(\tilde{w})$ o $V_1(\tilde{w})$ con probabilidades $1-p_0$ y p_0, respectivamente.
- Un trabajador empleado activo devenga un salario w y comienza el siguiente período con un valor $V_0(\tilde{w})$ o $V_1(\tilde{w})$ con probabilidades $1-p_1$ y p_1, respectivamente.

- El salario crítico w_0^* al cual un trabajador desempleado empieza a buscar está caracterizado por la condición

$$V_{00}(w_0^*) = V_{01}(w_0^*).$$

- El salario crítico w_1^* al cual un trabajador empleado renuncia está caracterizado por la condición

$$V_{10}(w_1^*) = V_{11}(w_1^*).$$

- Un trabajador desempleado busca trabajo si

$$u + V_0^*(w) > v$$

y uno empleado continúa trabajando si

$$w + V_1^*(w) > v$$

donde

$$V_i^*(w) \equiv \delta p_i E_\epsilon \left[V_1(h(w,\epsilon)) - V_0(h(w,\epsilon))\right],$$

son los valores de las opcions de estar activo para un trabajador desempleado, $i = 0$, o empleado, $i = 1$.
- Como $V_i^*(w) > 0$, un trabajador desempleado podría buscar trabajo, aún cuando su beneficio de estar ocioso exceda su beneficio de desempleo, y un trabajador empleado seguiría trabajando aún cuando su salario sea menor que su beneficio de ocio.

Solución numérica

- El método de colocación requiere que la función valor sea aproximada con una combinación lineal de n funciones base ϕ_k:
$$V_i(w) \approx \hat{V}_i(w) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\phi_k(w).$$
- Los $2 \times n$ coeficientes c_{ik} se fijan requiriendo que la función valor aproximada satisfaga la ecuación de Bellman en n nodos w_l escogidos apropiadamente.

Esto requiere resolver las $2 \times n$ ecuaciones no lineales de colocación

$$\hat{V}_i(w_l) \equiv \max\left\{\hat{V}_{i0}(w_l)\,, \hat{V}_{i1}(w_l)\right\},$$

$i = 0, 1$, $l = 1, 2, \dots, n$, donde

$$\hat{V}_{i0}(w_l) = v + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, \hat{V}_0[h(w_l, \epsilon)]$$
$$\hat{V}_{i1}(w_l) = w_l i + u(1-i) + \delta\, \mathbb{E}_\epsilon \left\{p_i \hat{V}_1[h(w_l, \epsilon)] + (1-p_i)\hat{V}_0[h(w_l, \epsilon)]\right\},$$

para los $2 \times n$ coeficientes base c_{ik}, $i = 0, 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 5:

Búsqueda de trabajo

- En el cuaderno `dp/04 Job Search Model` resolvemos este modelo asumiendo
  - $h(w, \epsilon) = \bar{w} + \gamma(w - \bar{w}) + \epsilon$, $\bar{w} = 100$, $\gamma = 0.4$;
  - ϵ son serialmente i.i.d. normal, media 0, desviación estándar $\sigma = 5$;
  - $u = 90$, $v = 95$, $p_0 = 0.2$, $p_1 = 0.9$, $\delta = 0.95$.
- La función valor es aproximada con una combinación lineal de $n = 150$ splines cúbicos en $[0, 200]$.
- La perturbación al salario ϵ se discretiza usando un esquema de cuadratura de Gauss con $m = 15$ nodos.

- El salario crítico al cual un trabajador desempleado buscará trabajo es $w_0^* = 93.8$.
- El salario crítico al cual un trabajador empleado renunciará es $w_1^* = 79.4$,
- The critical wages were computed numerically by solving $\hat{V}_0(w_i^*, i) = \hat{V}_1(w_i^*, i)$, for $i = 0, 1$.

Figura 8.12: Funciones valor condicionales y salario crítico, trabajador empelado vs. desempleado

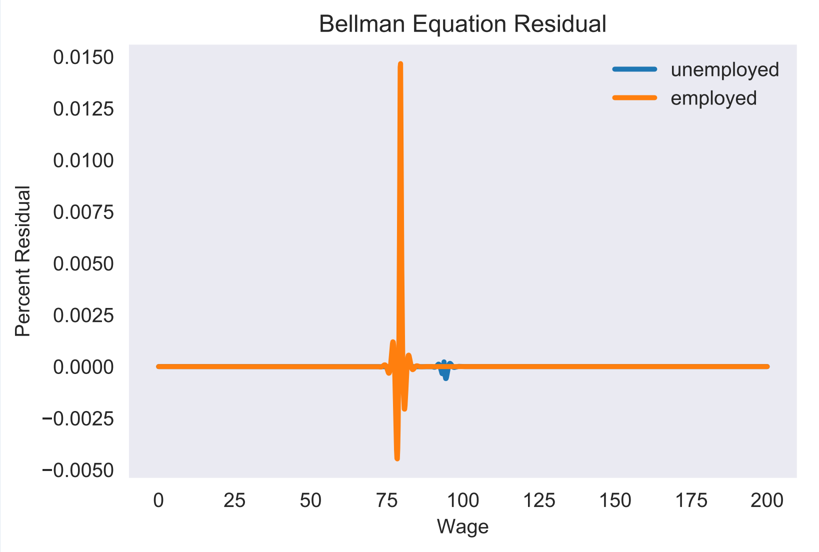


Figura 8.13: Residuos de la ecuación de Bellman

Análisis paramétrico

- La tasa ergódica de desempleo es 37%.
- £Cómo cambia este valor si...

escenario base	37%
el beneficio de desempleo baja a 80?	100%
el salario promedio aumenta 20%?	34%
la desviación estándar de los shock salariales sube a 8?	43%
la probabilidad de encontrar un trabajo sube a 30%?	26%

- £Cómo adaptaría usted el modelo y el código para imponer un límite al tiempo que puede devengarse beneficios de desempleo?

Modelo 5:

Precio de una opción americana

dp/05 American Put Option Pricing Model

MODEL 5: Precio de una opción americana

- Una opción de venta americana le da al inversionista la opción, pero no la obligación, de vender un determinado activo a un precio determinado K dentro de un plazo especificado de T períodos.
- Al inicio de cada período $t \leq T$, el inversionista observa el precio del activo subyacente P_t y debe decidir si ejecutar la opción, ganando un beneficio de $K - P_t$, o posponer su ejecución por al menos otro período.
- El logaritmo del precio del activo $p_t = \log P_t$ evoluciona según $p_{t+1} = p_t + \epsilon_{t+1}$ donde los ϵ son serialmente i.i.d. normales con media μ y varianza σ^2.
- Si el inversionista es neutral al riesgo, y por tanto maximiza el beneficio esperado descontado a la tasa libre de riesgo, entonces £cómo evoluciona en el tiempo el precio crítico al cual el inversionista debe ejecutar la opción?

Formulación

Este es un modelo estocástico de horizonte finito, con las siguientes características:

- Una variable de estado continua, el logaritmo del precio del activo
$$p_t \in (-\infty, \infty).$$
- Una variable de acción binaria, la decisión de ejecutar la opción
$$j_t = \begin{cases} 1 & \text{ejecutar} \\ 0 & \text{no ejecutar.} \end{cases}$$

- La recompensa es el beneficio de la opción

$$\pi_t = \begin{cases} 0, & \text{si } j_t = 0 \\ K - \exp(p_t), & \text{si } j_t = 1. \end{cases}$$

- Las transiciones del estado siguen

$$p_{t+1} = p_t + \epsilon_{t+1}$$

Ecuación de Bellman

El valor de una opción no ejecutada en el período t, dado el (log) precio del activo p, satisface la ecuación recursiva de Bellman

$$V_t(p) = \max\{\underbrace{K - \exp(p)}_{\text{ejecutar}}, \quad \underbrace{\delta \, \mathbb{E}_\epsilon \, V_{t+1}(p + \epsilon)}_{\text{no ejecutar}}\},$$

$t = 0, 1, 2, \dots T$, sujeta a la condición terminal $V_{T+1} \equiv 0$.

- Si la opción de venta se ejecuta, el inversionista gana un beneficio único de $K - \exp(p)$ igual a la diferencia entre el precio del activo y el precio fijado en el contrato.
- Si la opción no se ejecuta, el inversionista no obtiene beneficio pero empieza el siguiente periodo con una opción valorada en $V_{t+1}(\tilde{p})$, donde $\tilde{p}$ es el (log) precio del activo en el siguiente período.
- El (log) precio crítico del activo p_t^* al cual la opción debe ejecutarse en t está caracterizada por

$$K - \exp(p_t^*) = \delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, V_{t+1}(p_t^* + \epsilon).$$

Solución numérica

- El método de colocación requiere que las funciones valor contingentes en el tiempo sean aproximadas con una combinación lineal de n funciones base ϕ_k:

$$V_t(p) \approx \hat{V}_t(p) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_{tk}\phi_k(p),$$

  $t = 0, 1, 2, \ldots, T$.

- Los $(T+1) \times n$ coeficientes c_{tk} se fijan requiriendo que las funciones valora aproximadas satisfagan la ecuación de Bellman en n p_i escogidos apropiadamente.

Esto requiere resolver recursivamente las $(T+1)\times n$ ecuaciones no lineales de colocación

$$\hat{V}_t(p_i) = \max\{\underbrace{K - \exp(p_i)}_{\text{ejecutar}}, \quad \underbrace{\delta\, \mathbb{E}_\epsilon\, \hat{V}_{t+1}(p_i+\epsilon)}_{\text{no ejecutar}}\},$$

$t = 0, 1, 2, \dots, T$, $i = 1, 2, \dots, n$, sujeto a la condición terminal $V_{T+1} \equiv 0$.

Los precios críticos del activo p_t^* a los cuales la opción de venta debe ejecutarse en el período t se calculan numéricamente resolviendo

$$K - \exp(p_t^*) = \delta \, \mathbb{E}_\epsilon \, \hat{V}_{t+1}(p_t^* + \epsilon)$$

Ejemplo 6:
Precio de una opción americana

- Este modelo lo resolvemos con el cuaderno `dp/05 American Put Option Pricing Model`, asumiendo que $T = 300$, $K = 1$, $\mu = 0.0001$, $\sigma = 0.008$, y $\delta = 0.9998$.
- Las funciones de valor se aproximan con combinaciones lineales de $n = 500$ splines cúbico en $[-1, 1]$.
- La perturbación al (log) del precio ϵ se discretiza usando un esquema de cuadratura de Gauss con $m = 15$ nodos.

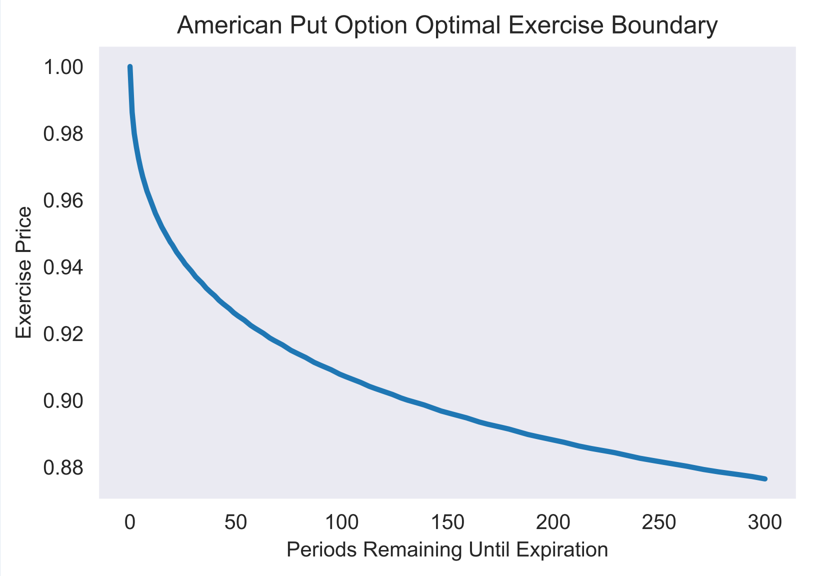


Figura 8.14: Frontera de precio de ejecución de una opción de venta americana

Análisis paramétrico

- El precio crítico de ejecución 300 periodos antes del vencimiento de la opción es 0.88.
- £Cómo cambia este valor si...

escenario base	0.88
se duplica la volatilidad del precio?	0.75
la deriva del precio se duplica?	0.91
el precio predeterminado es $1.10?	0.96

- £Como adaptaría usted el modelo y el código para determinar el precio de una opción de compra, la cual le da al inversionista el derecho, pero no la obligación, de comparar el activo?

References I

- Miranda, Mario J. y Paul L. Fackler (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT Press. isbn: 0-262-13420-9.
- Romero-Aguilar, Randall (2016). *CompEcon-Python*. url: http://randall-romero.com/code/compecon/.