Tema 5
Optimización restringida en dimensión finita

Randall Romero Aguilar, PhD

Universidad de Costa Rica

SP6534 - Economía Computacional

I Semestre 2020

Última actualización: 10 de marzo de 2020

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. Introducción

Aplicaciones

Los problemas de optimización restringida son muy comunes en economía:

- La empresa maximiza ganancias sujeta a restricciones de recursos
- La empresa minimiza costo de producir una cantidad específica del bien
- El consumidor maximiza su utilidad sujeto a una restricción presupuestaria

Definiciones

- En el problema de optimización restringida en dimensión finita, se tiene una función real f definida en $X \subset \Re^n$ y se necesita encontrar un $x^* \in X$ tal que $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in X$.
- Denotamos este problema

$$\max_{x \in X} f(x)$$

- Llamamos f la función objetivo, X el conjunto factible, y x^*, si existe, un máximo u óptimo.
- Nos enfocamos en maximización —para resolver un problema de minimización, simplemente maximizamos el negativo del objetivo.

Decimos que $x^* \in X$ es un ...

- máximo de f en X si $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in X$.
- máximo estricto de f en X si $f(x^*) > f(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq x^*$.
- máximo local de f en X si $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in X$ en algún vecindario de x^*.
- máximo local estricto de f en X si $f(x^*) > f(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq x^*$, en algún vecindario de x^*.

Teorema del valor extremo de Weierstrass

- Si f is continuo en un conjunto X no vacío, cerrado, y acotado, entonces f tiene un máximo en X.
- Los siguientes ejemplos ilustran el papel de los supuestos.
  - La función $f(x) = x$ no tiene máximo en $X = \Re$: f es continuo y X es cerrado, pero no acotado.
  - La función $f(x) = x$ no tiene máximo en $X = [0,1)$: f es continuo y X acotado, pero no cerrado.
  - La función
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
    no tiene máximo en $X = [0,1]$: X es cerrado y acotado, pero f no es continuo.

2. Optimización con restricciones de igualdad

Definición

El problema canónico de optimización con restricciones de igualdad tiene la forma

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{sujeto a} \quad & g(x) = c \end{aligned}$$

donde $f : \Re^n \mapsto \Re$ y $g : \Re^n \mapsto \Re^m$ son funciones continuamente diferenciables, f es cóncava, g es convexa, y $c \in \Re^m$.

Teorema de Lagrange

- Teorema de Lagrange: Un vector x^* maximiza $f(x)$ sujeto a $g(x) = c$ si, y sólo si, hay un vector $\lambda^* \in \Re^m$ tal que (x^*, λ^*) maximiza el lagrangiano

$$L(x,\lambda) \equiv f(x) + \lambda'(c - g(x)).$$

- En particular, x^* y λ^* deben satisfacer simultáneamente

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x}(x^*, \lambda^*) = f'(x^*) - \lambda^{*'} g'(x^*)$$
$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = c - g(x^*)$$

Teorema de la envolvente

- Los λ_i^* se conocen como precios sombra.
- El teorema de la envolvente afirma que bajo supuestos leves,

$$\frac{\partial f^*}{\partial c_i} = \lambda_i^*,$$

donde f^* es el valor óptimo del objetivo.

Ejemplo 1:

Problema de minimización

- Consideremos

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2 - x_1^2 - x_2^2 \\
\text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 = k
\end{aligned}
$$

- El lagrangiano para este problema es

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda(k - x_1 - x_2).$$

- Las condiciones de primer orden son

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = -2x_1 - \lambda \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = -2x_2 - \lambda \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = k - x_1 - x_2.
\end{aligned}
$$

- Resolviendo estas condiciones encontramos

$$x_1 = x_2 = k/2 \quad \text{y} \quad \lambda = -k$$

- Así, el valor óptimo es

$$f^* = 2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = 2 - \frac{k^2}{2}.$$

- Notemos que

$$\frac{df^*}{dk} = -k = \lambda^*$$

como lo garantiza el teorema de la envolvente.

Ejemplo 2:

Problema de maximización

Consideremos

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 18 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 - x_2 = 1 \end{aligned}$$

El lagrangiano para este problema es

$$L(x_1, x_2, \lambda) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 18 + \lambda(1 - x_1 + x_2).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= -2x_1 - 2x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= -2x_1 - 4x_2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= 1 - x_1 + x_2 = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos $x_1 = 0.6, x_2 = -0.4, \lambda = -0.4$.

Ejemplo 3:

Un problema de la empresa

- Una empresa produce un único bien usando dos insumos, de acuerdo con la función de producción $q = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$.
- Los insumos pueden comprarse a salarios competitivos w_1 y w_2.
- £Cuál es el costo mínimo de producir la cantidad q?
- El problema de optimización de la empresa es

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = q. \end{aligned}$$

- El lagrangiano para este problema es

$$L(x_1, x_2, \lambda) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda(q - x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}).$$

- Las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = w_1 - \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = w_2 - \lambda(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = q - x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

- Partiendo de las dos primeras condiciones, obtenemos

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha x_2}{(1-\alpha)x_1}$$

- Esto implica que

$$x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{w_1}{w_2}x_1$$

- Sustituyendo en la restricción de producción y resolviendo encontramos

$$x_1 = q\left(\frac{w_2\alpha}{w_1(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}$$

$$x_2 = q\left(\frac{w_2\alpha}{w_1(1-\alpha)}\right)^{-\alpha}$$

- Después de manipulaciones algebraicas adicionales

$$\lambda = \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

- El precio sombra es el costo marginal de producción de la empresa.

3. Optimización restringida general

Optimización restringida general

El problema de optimización restringida en dimensión finita que consideramos tiene la forma

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{sujeto a} \quad & g(x) \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $f : \Re^n \mapsto \Re$ y $g : \Re^n \mapsto \Re^m$ son continuamente diferenciables, f es cóncava, g es convexa, y $b \in \Re^m$.

Pensemos en el problema de optimización así:

- Hay n actividades económicas.
- El nivel de la actividad j se denota x_j, el cual es inherentemente no negativo.
- $f(x)$ es el beneficio recibido de las actividades x.
- Las actividades requieren el uso de m recursos.
- Se requiere una cantidad $g_i(x)$ de recurso i para sustentar la actividad x.
- Hay una cantidad limitada b_i de recurso i disponible.
- El agente busca el vector de actividad $x \geq 0$ que maximiza el beneficio $f(x)$ sujeto a disponibilidad de recurso $g(x) \leq b$.

Teorema de Karush-Kuhn-Tucker

- Teorema de Karush-Kuhn-Tucker: Un vector x maximiza $f(x)$ sujeto a $g(x) \leq b$ y $x \geq 0$ si y sólo si, hay un vector $\lambda \in \Re^m$ tal que para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$

$$x_j \geq 0 \perp f'_j(x) - \sum_i \lambda_i g'_{ij}(x) \leq 0$$

$$\lambda_i \geq 0 \perp g_i(x) \leq b_i.$$

donde $f'_j \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ y $g'_{ij} \equiv \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$.

- Aquí, $\perp$ indica complementariedad: ambas desigualdades deben cumplirse, y al menos una debe cumplirse con igualdad estricta.
- Si f es estrictamente cóncava, g es convexa, y x y λ satisfacen estas condiciones, entonces x es único.

Consideremos el problema $\max f(x)$ sujeto a $a \leq x \leq b$:

$$L = f(x) + \lambda(x-a) + \mu(b-x) \qquad \Rightarrow$$

$$f'(x) + \lambda - \mu = 0$$

$$\begin{array}{lll} \lambda \geq 0 & x-a \geq 0 & \lambda(x-a) = 0 \\ \mu \geq 0 & b-x \geq 0 & \mu(b-x) = 0 \end{array}$$

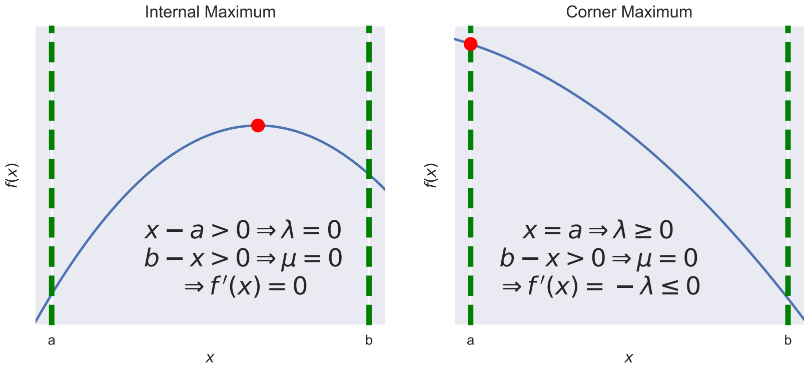

Figura 5.1: Bound Constrained Optimization

- Los λ_i son llamados precios sombra.
- El teorema de la envolvente afirma que bajo supuestos leves,

$$\frac{\partial f^*}{\partial b_i} = \lambda_i,$$

  donde f^* es el valor óptimo del objetivo.
- Entonces, λ_i es el costo marginal implícito del recurso i y

$$MB_j(x) = f_j'(x) - \sum_i \lambda_i g_{ij}'(x)$$

  es el beneficio económico marginal de la actividad j, el cual es igual al beneficio marginal explícito de la actividad j menos el costo marginal implícito de los recursos requeridos para la actividad j.

- Las condiciones de complementariedad K-K-T por lo general admiten una interpretación de arbitraje en aplicaciones de economía y finanzas:

$x_j \geq 0$	niveles de actividad son no negativos
$MB_j \leq 0$	de lo contrario, aumentamos el beneficio al subir x_j
$x_j > 0 \Rightarrow MB_j \geq 0$	de lo contrario, disminuimos el beneficio al bajar x_j
$MB_j < 0 \Rightarrow x_j = 0$	evitamos actividades no beneficiosas
$\lambda_i \geq 0$	precio sombra de recurso es no negativo
$g_i(x) \leq b_i$	uso del recurso no puede exceder la disponibilidad
$\lambda_i > 0 \Rightarrow g_i(x) = b_i$	no deben desperdiciarse recursos valiosos
$g_i(x) < b_i \Rightarrow \lambda_i = 0$	recursos sobrantes no tiene valor

Ejemplo 4:
Una empresa en dos mercados

- Una empresa puede vender una cantidad fija q en dos mercados distintos con curvas inversas de demanda

$$p_i = \alpha_i - \frac{\beta_i}{2} q_i$$

donde q_i es la cantidad vendida y p_i es el precio en el mercado i.

- £Cuánto debe vender en cada mercado para maximizar sus ingresos?
- El problema de optimización de la empresa es

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha_1 q_1 - \frac{\beta_1}{2} q_1^2 + \alpha_2 q_2 - \frac{\beta_2}{2} q_2^2 \\ \text{sujeto a} \quad & q_1 + q_2 \leq q \\ & q_1 \geq 0, q_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Las condiciones K-K-T para este problema son

$$q_1 \geq 0 \perp \alpha_1 - \beta_1 q_1 - \lambda \leq 0$$

$$q_2 \geq 0 \perp \alpha_2 - \beta_2 q_2 - \lambda \leq 0$$

$$\lambda \geq 0 \perp q_1 + q_2 \leq q.$$

- El objetivo es cóncavo, restricción es lineal, así que las condiciones K-K-T son necesarias y suficientes.
- Respuesta:

$$q_i = \frac{\alpha_i - \alpha_j + q\beta_j}{\beta_1 + \beta_2}, \quad i \neq j.$$

siempre y cuando $q \geq \max\{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1}, \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_2}\}$.

La función scipy.optimize.minimize

- Los algoritmos para resolver problemas de optimización restringida pueden ser bastante complicados, por ello no los discutiremos en este curso.
- No obstante, ilustraremos cómo usar la función `minimize` del módulo `scipy.optimize`.
- `scipy.optimize.minimize` resuelve el problema canónico de minimization restringida:

$$\begin{aligned} \min f(x) \quad & \text{sujeto a} \\ g_i(x) \geq 0, \qquad & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, \qquad & j = 1, \dots, p \\ a \leq x \leq b & \end{aligned}$$

donde $x \in \Re^n$.

minimize: protocolo de uso

```
minimize(fun, #función objetivo
         x0, #n-vector, adivinanza inicial
         args=(), #argumentos extra para la función
         method=None, #tipo de solver
         bounds=None, #límites para las variables
         constraints=()) #restricciones
```

Las restricciones se pasan como una tupla de diccionarios:

```
cons = ({'type': 'eq', 'fun': h1}, ...
        {'type': 'eq', 'fun': hp},
        {'type': 'ineq', 'fun': g1}, ...
        {'type': 'ineq', 'fun': gm})
```

mientas que los límites se pasan como una tupla de pares inferior-superior:

```
bnds = ((a1, b1), ..., (an, bn))
```

minimize: resultado

Resultado: un objeto con estos atributos (entre otros)

x	la solución de la optimización
fun	valor de la función objetivo
message	descripción de la causa de terminación
nfev	número de evaluaciones de la función
nit	número de iteraciones del optimizador
success	True si se encuntra una solución

Ejemplo 5:

Usando scipy.optimize.minimize

Para resolver

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_0^2 - (x_1 - 1)^2 - 3x_0 + 1 \\ \text{sujeto a} \quad & 4x_0 + x_1 \leq 0.5 \\ & x_0^2 + x_1 \leq 2.0 \\ & x_0 \geq 0, x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

partiendo del valor $(x_0, x_1) = (0, 1)$ ejecutamos este código

```python
from scipy.optimize import minimize
def f(x):
    return x[0]**2 + (x[1]-1)**2 + 3*x[0] - 2

cons = ({'type': 'ineq',
         'fun': lambda x: 0.5 - 4*x[0] - x[1]},
        {'type': 'ineq',
         'fun': lambda x: 2.0 - x[0]**2 - x[0]*x[1]})

bnds = ((0, None), (0, None))
res = minimize(f,  [0.0, 1.0], method='SLSQP',
               bounds=bnds, constraints=cons)
```

Esto debe producir

```
fun: 1.0078716929461423e-09
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 148
nit: 79
status: 0
success: True
x: array([1.    , 1.0001])
```

References I

Miranda, Mario J. y Paul L. Fackler (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT Press. isbn: 0-262-13420-9.

Romero-Aguilar, Randall (2016). *CompEcon-Python*. url: http://randall-romero.com/code/compecon/.