Tema 1
Introducción a la Economía Computacional

Randall Romero Aguilar, PhD

Universidad de Costa Rica
SP6534 - Economía Computacional

I Semestre 2020
Última actualización: 10 de marzo de 2020

Tabla de contenidos

1. Introducción

Prólogo

- Esta es una de las ecuaciones más importantes en economía

$$V(s) = \max_x \{f(s,x) + \delta V(g(s,x))\}.$$

- Se conoce como ecuación de Bellman.
- Describe el comportamiento de un agente económico racional quien pondera las consecuencias futuras de las acciones que toma hoy.
- Es una ecuación funcional.
- En este curso aprenderemos a resolver este tipo de ecuaciones.

2. Algunas preguntas aparentemente simples

Demanda inversa

- Consideremos la función de demanda de elasticidad constante:
$$q = p^{-0.5}.$$
- £A qué precio p^* se aclara el mercado cuando la cantidad es $q = 2$?
- Fácil. Elevamos ambos lados de la ecuación a la -2 y damos vuelta para derivar la función de demanda inversa
$$p = q^{-2}.$$
- Luego calculamos el precio de equilibrio de mercado
$$p^* = 2^{-2} = 1/4.$$

- Ahora consideremos la función de demanda

$$q = 0.5p^{-0.2} + 0.5p^{-0.5}$$

con dos términos aditivos, digamos, demanda doméstica y de exportación.
- Claramente, la función de demanda es estrictamente decreciente y continuamente diferenciable.
- Según el Teorema de la Función Implícita, la función de demanda inversa está bien definida, es estrictamente decreciente, y es diferenciable.
- Pero, £cuál es la función de demanda inversa y cuál precio p^* equilibra el mercado si la cantidad es $q = 2$?

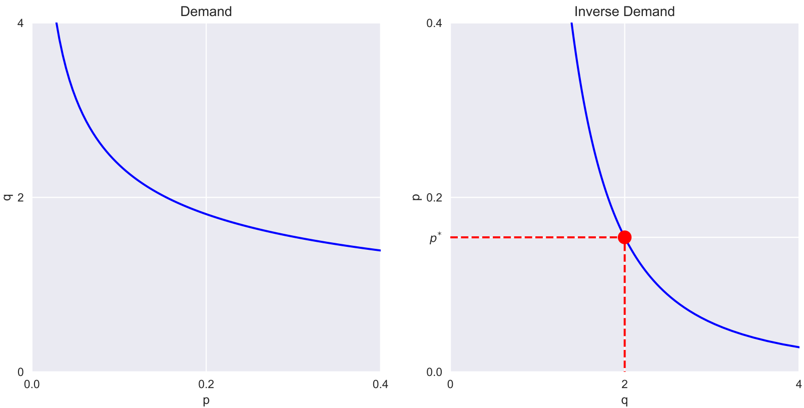

Figura 1.1: Función de demanda $q = 0.5p^{-0.2} + 0.5p^{-0.5}$ y su inversa

Programa de precio de soporte

- Consideremos un mercado agrícola con dos períodos: siembra y cosecha.
- Los agricultores siembran a hectáreas basándose en el precio p que esperan recibir al cosechar:

$$a = 0.5 + 0.5Ep.$$

- El precio de equilibrio al momento de la cosecha es una función de la cantidad q:

$$p = 1.5 - 0.5q.$$

- La producción q cosechada depende del área sembrada y de un rendimiento por hectárea que es exógeno y aleatorio $\tilde{y}$:

$$q = a\tilde{y}.$$

- El rendimiento es desconocido a la hora de sembrar, pero su valor esperado es 1.

- Para resolver, substituimos la 3^a expresión en la 2^a

$$p = 1.5 - 0.5a\tilde{y}.$$

- Tomas esperanza a ambos lados

$$Ep = 1.5 - 0.5a.$$

- Substituimos en la 1^a expresión

$$a = 0.5 + 0.5(1.5 - 0.5a) = 1.25 - 0.25a.$$

- Concluimos que

$$a = 1 \quad \text{and} \quad Ep = 1.$$

- El presidente Carlos Alvarado propone un programa de apoyo al agricultor.
- Si el precio de mercado p cae debajo de la meta de 1, el gobierno pagará a cada agricultor $1-p$ por unidad de producto.
- Así, el precio efectivo para el agricultor es $\max(p,1)$.
- Los agricultores continúan sembrando hectáreas basándose en el precio que esperar recibir al momento de la cosecha:

$$a = 0.5 + 0.5E\max(p,1).$$

- Ahora el modelo es

$$a = 0.5 + 0.5 E \max(p, 1)$$

$$p = 1.5 - 0.5 q$$

$$q = a\tilde{y}$$

- Así, luego de algunas sustituciones,

$$a = 0.5 + 0.5 E \max(1.5 - 0.5 a\tilde{y}, 1).$$

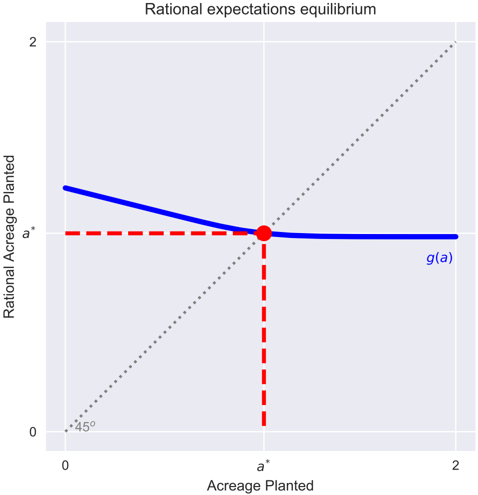

Figura 1.2: Equilibrio de expectativas racionales

- Suena el teléfono.
- Es el Presidente Alvarado.
- Le pregunta a usted: £Cómo afectará el programa al precio pagado por los consumidores, al precio recibido por los agricultores, y al gasto del gobierno?
- Quiere una respueta mañana temprano.
- £Qué le contestará usted?

3. Un esquema analítico alternativo

Un esquema analítico alternativo

- Ninguno de los dos modelos anteriores puede resolverse usando los métodos usuales del álgebra y el cálculo:
  - El primer modelo plantea la búsqueda de las raíces de un polinomio de grado 5.
  - El segundo modelo plantea un problema no lineal de punto fijo.
- Ninguno de los modelos tiene solución cerrada.
- No obstante, ambos pueden ser fácilmente resueltos en una computadora utilizando métodos numéricos.

Demanda inversa

- Dada la función de demanda

$$q = 0.5p^{-0.2} + 0.5p^{-0.5},$$

el precio p^* que equilibra el mercado cuando la cantidad es $q = 2$ es una raíz de la función

$$f(p) = 0.5p^{-0.2} + 0.5p^{-0.5} - 2,$$

es decir, $f(p^*) = 0$.

- La raíz de f puede calcularse usando el *método de Newton*: adivinamos un valor inicial p_0 y sucesivamente iteramos

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)}$$

hasta que la secuencia converja.

- Abra el cuaderno CompEcon `demintro01`, el cual calcula el precio de equilibrio usando el método de Newton:

```
p = 0.2
for it in range(50):
  f =  0.50*p**-0.2 + 0.50*p**-0.5 - 2
  d = -0.01*p**-1.2 - 0.25*p** -1.5
  s = -f / d
  p += s
  if abs(s)< 1e-10:
    break
```

- Ejecute el código. Después de 14 iteraciones, p converge a 0.1542.

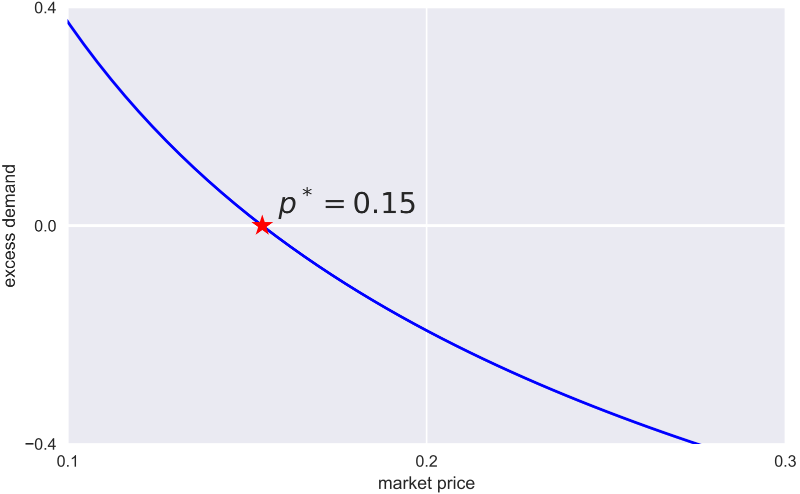

Figura 1.3: Función de exceso de demanda $q = 0.5p^{-0.2} + 0.5p^{-0.5} - 2$ y su raíz

- Bajo el programa de precio de soporte, al área cultivada de equilibrio a es un punto fijo de la función

$$g(a) = 0.5 + 0.5E\max(1.5 - 0.5a\tilde{y}, 1),$$

  es decir, $a = g(a)$.

- El punto fijo de g puede calcularse usando *iteración de función*: adivinamos un valor inicial a_0 y sucesivamente iteramos

$$a_{k+1} = g(a_k)$$

  hasta que la secuencia converja.

Abra el cuaderno CompEcon demintro02, el cual calcula el área sembrada de equilibrio usando iteración de función, asumiendo que el rendimiento es lognormal con media 1 y volatilidad 0.2:

```
from compecon import qnwlogn
import numpy as np

sigma2 = 0.2**2
y, w = qnwlogn(25, -0.5*sigma2, sigma2)

def acreage(aa, pp):
  return 0.5 + 0.5*w @ np.maximum(1.5-0.5*aa*y, pp)

a, ptarg = 1, 1
for it in range(50):
  aold, a = a, acreage(a, ptarg)
  if np.linalg.norm(a - aold) < 1.e-8:
    break
```

Ejecute el código. Después de 9 iteraciones, a converge a 1.0174.

- Ahora respondamos las preguntas del president Alvarado.
- Corra `demintro02`, el cual calcula las medias y desviaciones estándar de la cantidad producida, el precio de mercado, el precio al agricultor, el ingreso del agricultor, y el gasto del gobierno.
- Debe obtener

```
Variable                   Expect   Std Dev
Market Price               0.9913   0.1028
Farm Price                 1.0348   0.0506
Farm Revenue               1.0447   0.1773
Government Expenditures    0.0573   0.1038
```

- £Cómo cambian estos valores conforme varía el precio meta?

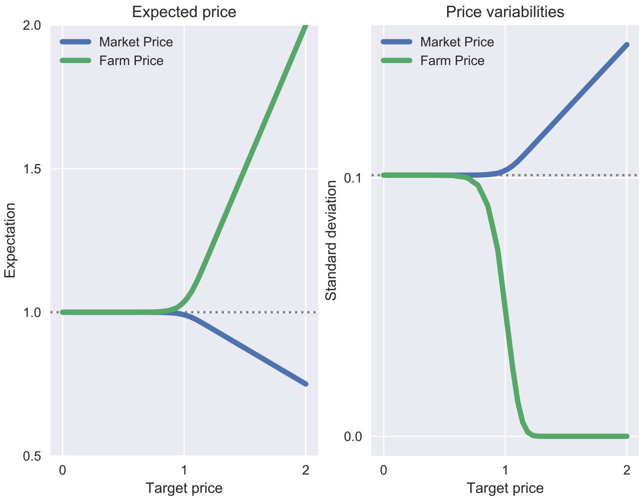

Figura 1.4: Expectativa y volatilidad del precio

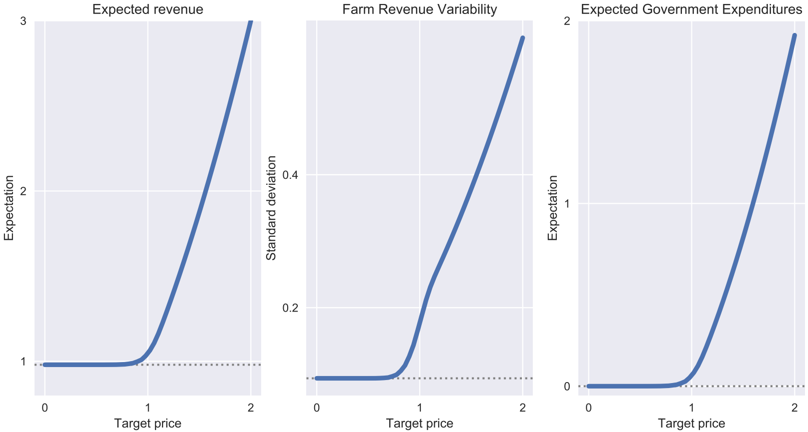

Figura 1.5: Ingreso de los agricultores y gasto del gobierno

4. Acerca del curso

£Por qué métodos numéricos?

Muchos modelos económicos interesantes carecen de solución de forma cerrada: no pueden resolverse analíticamente usando álgebra y cálculo, entre ellos

- Modelos de gran escala o altamente no lineales.
- Modelos con restricciones vinculantes.
- Modelos dinámicos, que usualmente conllevan a ecuaciones funcionales.

Muchos de estos modelos pueden, no obstante, ser resueltos y analizados usando métodos numéricos.

- La biología, física, e ingeniería ya han incorporado métodos numéricos.
- Sin embargo, los economistas se han resistido.
- Muchos piensan que las soluciones numéricas son menos elegantes o menos generales que las soluciones de forma cerrada.
- Esta posturas, sin embargo, son debatibles.

- Cuando las características de un sistema económico no pueden ser fielmente captadas en un modelo con solución algebraica, debe tomarse una decision.
- Ignorar las característica esenciales para que el modelo pueda resolverse con álgebra, o bien usar un esquema analítico alternativo.
- Lastimosamente a menudo se escoge la primera opción.

- No obstante, los métodos numéricos rápidamente están ganando aceptación entre economistas.
- Con el creciente poder de las computadoras, los beneficios relativos de encontrar soluciones exacta de forma cerrada han disminuido.
- En muchas aplicaciones económicas, soluciones simples y aproximadas frecuentemente son más útiles que soluciones exactas pero complejas.
- Por otra parte, la baja calidad de los datos y un limitado entendimiento de las relaciones estructurales subyacentes no justifican la obsesión por la exactitud.

Objectivo del curso

Entrenar al estudiante en el uso de métodos numéricos para formular, resolver, y analizar modelos económicos y financieros, con un énfasis en modelos dinámicos.

Estructura del curso

El curso

- enfatiza los modelos económicos dinámicos.
- está basado en el libro de texto de Miranda y Fackler (2002).
- presenta ejemplos tomados de muchas áreas de economía y finanzas.
- no cubre temas de modelos de redes, basados en agentes, o de equilibrio general computable.
- contiene aplicaciones en Python integradas en las clases.
- es práctico: aprenda a usar Python, y el paquete `compecon`.

Instale Python en su computadora personal y tráela a clase.

Prerrequisitos

- Cálculo
- Álgebra lineal
- Estadística matemática
- Teoría microeconómica intermedia
- Teoría macroeconómica intermedia

Temas del curso

- Ecuaciones lineales y no lineales
- Optimización en dimensión finita
- Diferenciación e integración numérica
- Métodos numéricos para ecuaciones funcionales
- Ecuaciones diferenciales ordinarias
- Programación dinámica en tiempo discreto

punto fijo

ecuación funcional

$$V(s) = \max_{x \in [a,b]} \left\{ r(x,s) + \beta\, \mathbb{E}\; V(s') \right\}, \qquad \text{donde } s' = g(x,s)$$

cuadratura

optimización restringida

complementariedad
(ecuación no lineal)

con condición de primer orden

$$f(x) \equiv r_x(x,s) + \beta\, \mathbb{E}\, V'(s') g_x(x,s) \perp [a,\ b]$$

diferenciación

References I

Miranda, Mario J. y Paul L. Fackler (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT Press. isbn: 0-262-13420-9.

Romero-Aguilar, Randall (2016). *CompEcon-Python*. url: http://randall-romero.com/code/compecon/.