Pintando elefantes

Randall Romero Aguilar
randall.romero@ucr.ac.cr

29 de septiembre de 2019

Estos apuntos pretender ser una ayuda pedagógica para ayudarle a los estudiantes de EC-3201 Teoría Macroeconómica II, que ilustra las similitudes de los distintas aplicaciones de la teoría del consumidor, tal como se ilustran en los capítulos 7 y 8 del "libro" del curso.

1 Problema genérico del consumidor

El problema es maximizar la utilidad de consumir x unidades de X y y unidades de Y, sujeto a una restricción presupuestaria:

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{sujeto a } p_x x + p_y y = M$$

o alternativamente sujeto a $p_x x + p_y y = p_x \bar{x} + p_y \bar{y}$.

Condiciones de optimalidad (asumiendo que la solución no es de esquita) son:

$$\begin{cases} \dfrac{U_x}{p_x} = \dfrac{U_y}{p_x} \\ p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

Problema genérico del consumidor

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{sujeto a } p_x x + p_y y = M$$

Condición de primer orden

$$\frac{U_x}{p_x} = \frac{U_y}{p_x}$$

2 Aplicaciones

2.1 Modelo de oferta de trabajo

El problema es maximizar la utilidad de consumir c unidades del bien de consumo y disfrutar l horas de ocio, cuando se cuenta con una dotación π del bien de consumo y h de tiempo, el cual debe emplearse en trabajar y en disfrutar ocio:

$$\max_{c,l} U(c,l) \quad \text{sujeto a } C = w(h-l) + \pi$$

La restricción puede escribirse de manera estándar como

$$\underset{p_x}{1}\, C + \underset{p_y}{w} l = \underset{p_x}{1}\, \pi + \underset{p_y}{w} h$$

En ausencia de un mercado laboral, el consumidor simplemente consume su dotación.

Condiciones de optimalidad (asumiendo que la solución no es de esquita) son:

$$\begin{cases} \dfrac{U_c}{1} = \dfrac{U_l}{w} \\ C + wl = \pi + wh \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} u_l = wU_c \\ C = \pi + w(h-l) \end{cases}$$

Modelo de oferta de trabajo

$$\max_{c,l} U(c,l) \quad \text{sujeto a } C = w(h-l) + \pi$$

Pintando el elefante

$$\max_{c,l} U(c,l) \quad \text{sujeto a } C + wl = wh + \pi$$

Condición de primer orden

$$\frac{U_c}{1} = \frac{U_l}{w} \quad \Rightarrow \quad u_l = wU_c$$

2.2 Modelo de elección con incertidumbre

El problema es maximizar la utilidad *esperada* de consumir c_g unidades del bien de consumo en el estado de la naturaleza g **o** disfrutar c_b unidades del bien de consumo en el estado de la naturaleza b, cuando los estados de la naturaleza tienen probabilidades π_g y π_b, sujeto a $\pi_g + \pi_b = 1$:

$$U\left(c_g, c_b | \pi_g, \pi_b\right) = \pi_g u(c_g) + \pi_b u(c_b).$$

El consumidor cuenta con una dotación y_g en el estado g y de y_b en el estado b. En ausencia de un mercado de seguro, el consumidor simplemente consume su dotación. Si hay un seguro que permite asegurar K unidades del bien contra el estado b, a cambio de una prima γ por unidad asegurada, entonces el consumo sería:

$$\begin{cases} c_g = y_g - \gamma K \\ c_b = y_b - \gamma K + K \end{cases} \Rightarrow \quad K = \frac{y_g - c_g}{\gamma} = \frac{c_b - y_b}{1-\gamma} \quad \Rightarrow \quad \underset{p_x}{(1-\gamma)} c_g + \underset{p_y}{\gamma}\, c_b = \underset{p_x}{(1-\gamma)} y_g + \underset{p_y}{\gamma}\, y_b$$

El problema es entonces

$$\max_{c_g, c_b} \pi_g u(c_g) + \pi_b u(c_b) \quad \text{sujeto a } (1-\gamma)c_g + \gamma c_b = (1-\gamma)y_g + \gamma y_b$$

Condiciones de optimalidad (asumiendo que la solución no es de esquita) son:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi_g u'(c_g)}{1-\gamma} = \dfrac{\pi_b u'(c_b)}{\gamma} \\ (1-\gamma)c_g + \gamma c_b = (1-\gamma)y_g + \gamma y_b \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma \pi_g u'(c_g) = (1-\gamma)\pi_b u'(c_b) \\ (1-\gamma)c_g + \gamma c_b = (1-\gamma)y_g + \gamma y_b \end{cases}$$

Modelo de elección con incertidumbre

$$\max_{c_g, c_b} \pi_g u(c_g) + \pi_b u(c_b) \quad \text{sujeto a } \begin{cases} c_g = y_g - \gamma K \\ c_b = y_b - \gamma K + K \end{cases}$$

Pintando el elefante

$$\max_{c_g, c_b} \pi_g u(c_g) + \pi_b u(c_b) \quad \text{sujeto a } (1-\gamma)c_g + \gamma c_b = (1-\gamma)y_g + \gamma y_b$$

Condición de primer orden

$$\frac{\pi_g u'(c_g)}{1-\gamma} = \frac{\pi_b u'(c_b)}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma \pi_g u'(c_g) = (1-\gamma)\pi_b u'(c_b)$$

2.3 Modelo de elección intertemporal

El problema es maximizar la utilidad de consumir c_0 unidades del bien de consumo en el período presente y disfrutar c_1 unidades del bien de consumo en el período futuro, cuando el consumidor descuenta la utilidad del período futuro con el factor de descuento β

$$U\left(c_0, c_1\right) = u(c_0) + \beta u(c_1).$$

El consumidor cuenta con una dotación y_0 en el período 0 y de y_1 en el período 1. En ausencia de un mercado de ahorro y crédito, el consumidor simplemente consume su dotación. Si hay un mercado de ahorro y crédito que permite ahorrar (o pedir prestado) S unidades del bien en el período 0 a una tasa de interés R, entonces el consumo sería:

$$\begin{cases} c_0 = y_0 - S \\ c_1 = y_1 + RS \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S = y_0 - c_0 = \frac{c_1 - y_1}{R} \quad \Rightarrow \quad \underset{p_x}{1}\, c_0 + \underset{p_y}{\frac{1}{R}} c_1 = \underset{p_x}{1}\, y_0 + \underset{p_y}{\frac{1}{R}} y_1$$

El problema es entonces

$$\max_{c_g, c_b} u(c_0) + \beta u(c_1) \quad \text{sujeto a } c_0 + \frac{c_1}{R} = y_0 + \frac{y_1}{R}$$

Condiciones de optimalidad (asumiendo que la solución no es de esquita) son:

$$\begin{cases} \dfrac{u'(c_0)}{1} = \dfrac{\beta u'(c_1)}{1/R} \\ c_0 + \dfrac{c_1}{R} = y_0 + \dfrac{y_1}{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u'(c_0) = \beta R u'(c_1) \\ \qquad c_1 = y_1 + R(y_0 - c_0) \end{cases}$$

Modelo de elección intertemporal

$$\max_{c_g, c_b} u(c_0) + \beta u(c_1) \quad \text{sujeto a } \begin{cases} c_0 = y_0 - S \\ c_1 = y_1 + RS \end{cases}$$

Pintando el elefante

$$\max_{c_g, c_b} u(c_0) + \beta u(c_1) \quad \text{sujeto a } c_0 + \frac{c_1}{R} = y_0 + \frac{y_1}{R}$$

Condición de primer orden

$$\frac{u'(c_0)}{1} = \frac{\beta u'(c_1)}{1/R} \quad \Rightarrow \quad u'(c_0) = \beta R u'(c_1)$$

2.4 Modelo de programación dinámica

El problema es maximizar la utilidad de consumir c_t unidades del bien de consumo en el período t, para un consumidor con horizonte infinito, cuando el consumidor descuenta la utilidad del consumo con el factor de descuento β

$$U\left(c_0, \ldots, c_\infty\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

El consumidor cuenta con una riqueza inicial A_0 en el período 0. En cualquier período t de su vida, el consumidor inicia con A_t unidades, consume c_t, y el resto lo invierte en un bono a una tasa de interés R, con lo que en el siguiente período su activo será A_{t+1} unidades:

Utilizando programación dinámica (tema 10 del curso), la función objetivo del consumidor puede escribirse como la ecuación de Bellman:

$$U(c_0, A_1) = V(A_0) = \max_{c_1, A_1} \left[u(c_0) + \beta V(A_1)\right]$$

Mientras que la restricción $A_{t+1} = R(A_t - c_t)$ puede reescribirse en el primer período como:

$$\underbrace{1}_{p_x} c_0 + \underbrace{\frac{1}{R}}_{p_y} A_1 = A_0$$

Nótese que, a pesar de la complicación adicional de introducir en la función objetivo a la función valor V, este modelo es en esencia similar al de consumo intertemporal con dos períodos. Por tanto, las condiciones de optimalidad (asumiendo que la solución no es de esquita) son:

$$\begin{cases} \dfrac{u'(c_0)}{1} = \dfrac{\beta V'(A_1)}{1/R} \\ c_0 + \dfrac{A_1}{R} = A_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(c_0) = \beta R V'(A_1) \\ A_1 = R(A_0 - c_0) \end{cases}$$

Modelo de programación dinámica

$$U\left(c_0, \ldots, c_\infty\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{sujeto a } A_{t+1} = R(A_t - c_t)\ \forall t = 0, 1, \ldots$$

Pintando el elefante

$$V(A_0) = \max_{c_1, A_1} \left[u(c_0) + \beta V(A_1)\right] \quad \text{sujeto a } c_0 + \frac{A_1}{R} = A_0$$

Condición de primer orden

$$\frac{u'(c_0)}{1} = \frac{\beta V'(A_1)}{1/R} \quad \Rightarrow \quad u'(c_0) = \beta R V'(A_1)$$

En este modelo en particular, sabiendo que la condición de la envolvente es $V'(A) = u'(c)$, puede obtenerse el siguiente resultado:

Ecuación de Euler

$$u'(c_0) = \beta R c'(c_1)$$