Econometría Aplicada para Bancos Centrales

Módulo 3: Filtrando series de tiempo

Instructores: Randall Romero y Luis Ortíz

San José, Costa Rica, 21-25 de agosto de 2017

Contenidos

1. Introducción
2. Algunos conceptos útiles
3. El filtro Hodrick-Prescott
4. El filtro Baxter-King

Introducción

El modelo del ciclo económico real (RBC)

Kydland y Prescott usan un modelo neoclásico de crecimiento para estudiar fluctuaciones económicas. Los pasos de su metodología:

1. Partir del modelo neoclásico de crecimiento
2. Modificar las cuentas nacionales para hacerlas consitentes con la teoría
3. Restringir modelo para que sea consistente con los hechos del crecimiento
4. Introducir un proceso de shock de Markov
5. Hacer una aproximación lineal-cuadrática
6. Calcular el equilibrio competitivo
7. Simular la economía del modelo
8. Examinar los indicadores clave del ciclo económico y realizar inferencias científicas
9. Revisar consistencia del modelo con observaciones de hogares y firmas individuales.

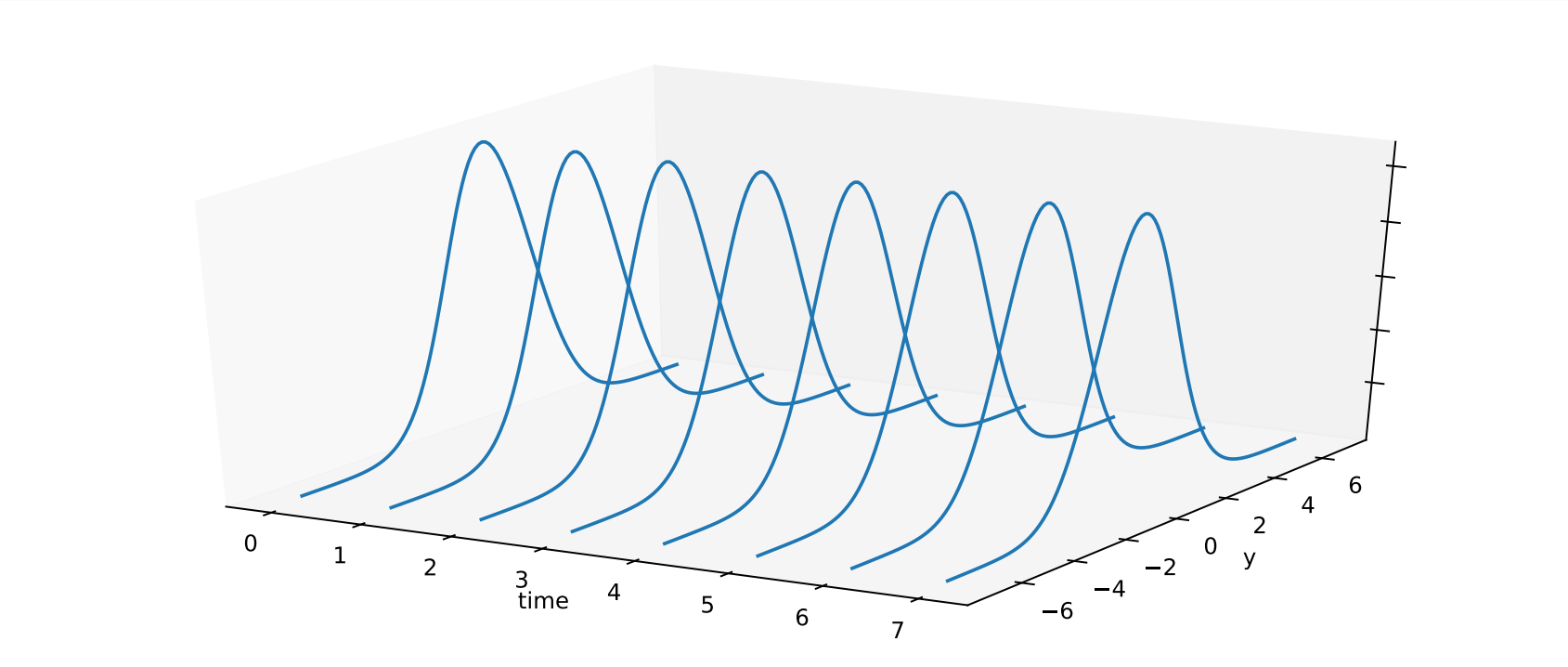
Algunos conceptos útiles

Proceso estocástico de tiempo discreto

- Un proceso estocástico de tiempo discreto es una colección de variables aleatorias, indexadas por un tiempo discreto. Por ejemplo $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, donde Y_t es una variable aleatoria.
- Una serie de tiempo es una colección de realizaciones provenientes de un proces estocástico de tiempo discreto. Por ejemplo $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, donde y_t es el valor que tomó la variable aleatoria Y_t.

Estacionariedad estricta

Un proceso estocástico es estrictamente estacionario si todas sus variables aleatorias tienen la misma distribución.



Autocovarianza

En un proceso estocástico, la autocovarianza de j rezagos es

$$\gamma_{t,j} = \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_{t-j}\right) = \mathbb{E}\left[\left(Y_t - \mu\right)\left(Y_{t-j} - \mu\right)\right]$$

Estacionariedad en covarianza

Una serie de tiempo $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es covarianza-estacionaria si para todo momento t se cumple

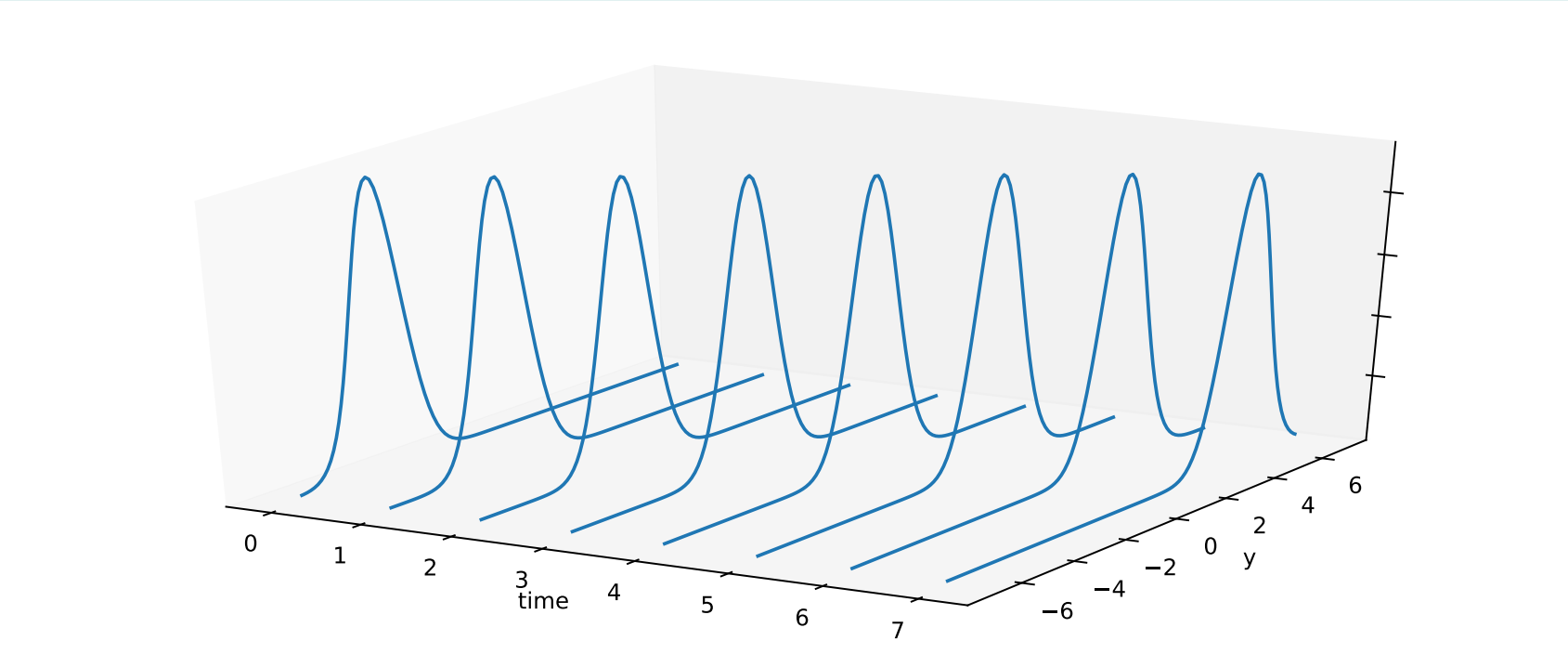
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Y_t\right) &= \mu \\ \mathrm{Var}\left(Y_t\right) &= \sigma^2 \\ \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_{t-j}\right) &= \gamma_j \end{aligned}$$

es decir, su media, su varianza, y sus autocovarianzas son constantes en el tiempo.

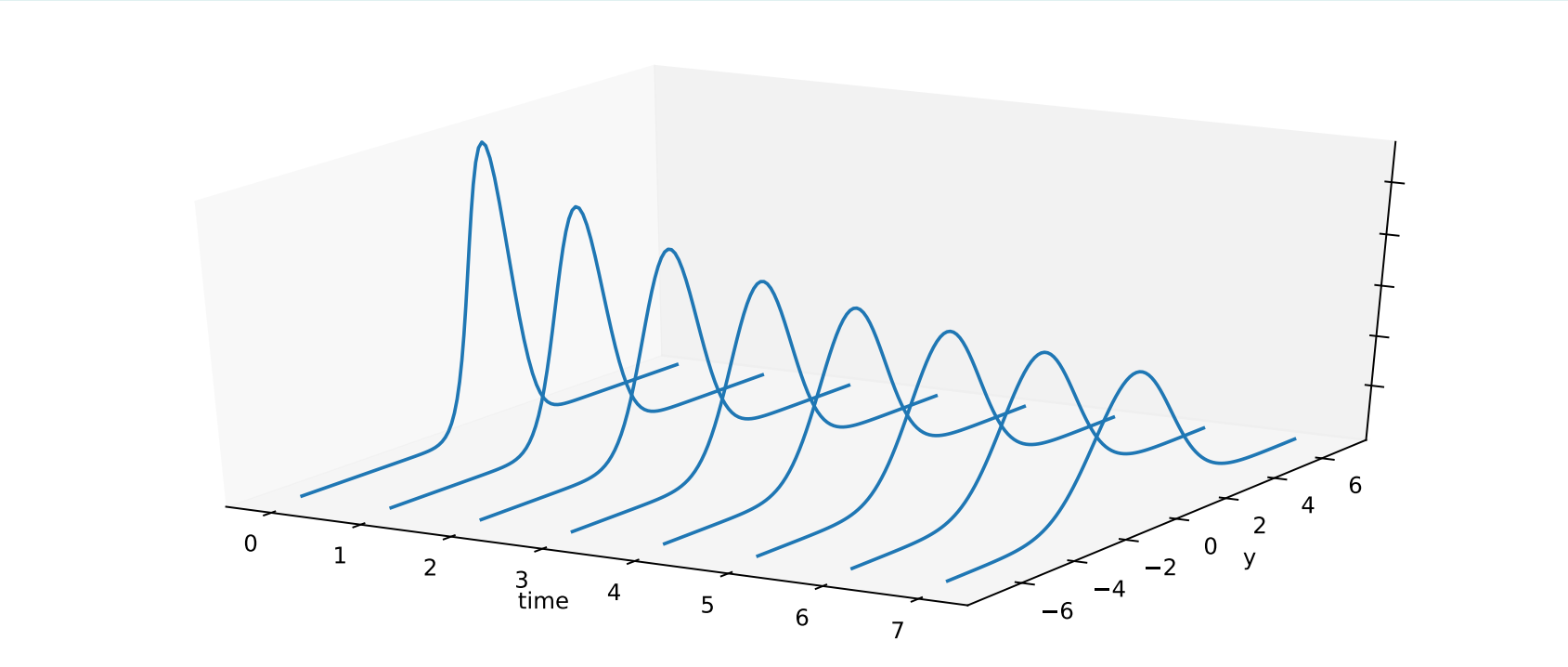
Ejemplo 1:

Procesos no estacionarios

$\mathbb{E}\left(Y_t\right)$ cambia con el tiempo.



$\mathrm{Var}\left(Y_t\right)$ cambia con el tiempo.



Representación de un proceso estacionario

- En dominio de tiempo τ:

$$y_t = \mu + \sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau \epsilon_{t-\tau}$$

- En dominio de frecuencias ω:

$$y_t = \mu + \int_0^{\pi} \left[\alpha_\omega \cos(\omega t) + \delta_\omega \sin(\omega t)\right] \, \mathrm{d}\omega$$

Espectro

El espectro de un proceso aleatorio con autocovarianzas γ_j es la función

$$
\begin{aligned}
s_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j) \right\}
\end{aligned}
$$

Su inversa es la autocovarianza:

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= \int_{-\pi}^{\pi} s_Y(\omega) e^{i\omega k} \, \mathrm{d}\omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} s_Y(\omega) cos(\omega k) \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2:

Espectro de un proceso ruido blanco

El proceso ruido blanco $\{\epsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ cumple que

- $\mathbb{E}\,\epsilon_t = 0$
- $\mathrm{Var}\,\epsilon_t = \sigma^2$
- $\mathrm{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-k}) = 0$ para todo $k \neq 0$

Su espectro es

$$
\begin{aligned}
s_\epsilon(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left\{\gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j \cos(\omega j)\right\} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}
\end{aligned}
$$

Interpretación del espectro

- El espectro es simétrico: $s(-\omega) = s(\omega)$
- La varianza de un proceso estocástico es

$$\gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} s_Y(\omega) cos(\omega \times 0)\ \mathrm{d}\omega = \int_{-\pi}^{\pi} s_Y(\omega)\ \mathrm{d}\omega = 2\int_{0}^{\pi} s_Y(\omega)\ \mathrm{d}\omega$$

- Entonces, el espectro permite descomponer la varianza de un proceso como la suma de las varianzas aportadas por ciclos de distintas frecuencias.

Ejemplo 3:

El ciclo económico

- La relación entre frecuencia ω y periodicidad p es:

$$\omega p = 2\pi$$

- Suponga que el PIB trimestral sigue un proceso estocástico estacionario, y que se define el ciclo económico como aquellos movimientos cíclicos del PIB que se repiten cada 6 a 32 trimestres.
- La varianza del PIB trimestral asociada al ciclo económico es

$$2 \int_{\pi/16}^{\pi/3} s_Y(\omega) \, \mathrm{d}\omega$$

Procesos estacionario (luego de transformarse)

Suponga que $\{S_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es un proceso estacionario. Entonces

- $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es un proceso estacionario alrededor de una tendencia si

$$X_t = \alpha + \beta t + S_t$$

- $\{Z_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es un proceso estacionario en diferencia si

$$Z_t = Z_{t-1} + S_t$$

La fórmula de Euler

La fórmula de Euler muestra que

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$$

Esto implica que

$$e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2\cos\omega$$
$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i\sin\omega$$

Filtro

- Un filtro es una transformación de un proceso estocástico en otro por medio de una operación con rezagos:

$$X_t = A(L)Y_t$$

- Si el espectro del proceso original es $s_Y(\omega)$, entonces el espectro del proceso filtrado es

$$s_X(\omega) = A\left(e^{i\omega}\right) A\left(e^{-i\omega}\right) s_Y(\omega)$$

- Al término $A\left(e^{i\omega}\right) A\left(e^{-i\omega}\right)$ se le conoce como la ganacia cuadrática del filtro.

Ejemplo 4:

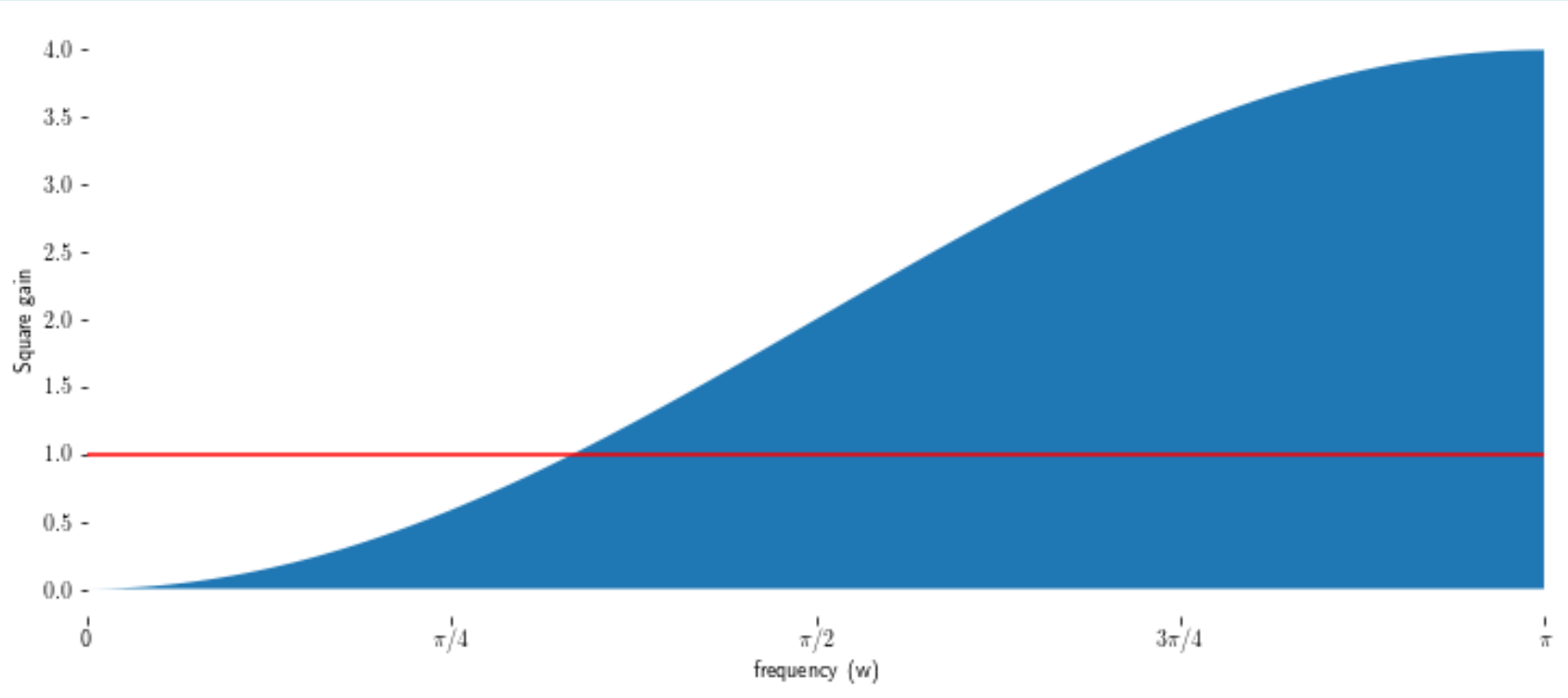
Obteniendo el espectro

Suponga que X_t se obtiene por primera diferencia de Y_t:

$$X_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$$

La ganancia cuadrática de esta operación es:

$$\left(1 - e^{i\omega}\right)\left(1 - e^{-i\omega}\right) = 2 - \left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right) = 2\left(1 - \cos\omega\right)$$



El filtro aumenta (disminuye) varianza de componentes que tardan menos (más) de 6 períodos en repetirse.

El proceso AR(1) es

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + \epsilon_t \\
&= (1 - \phi L)^{-1} \epsilon_t
\end{aligned}
$$

Entonces su espectro es

$$
\begin{aligned}
s_y(\omega) &= \left(1 - \phi e^{i\omega}\right)^{-1} \left(1 - \phi e^{-i\omega}\right)^{-1} s_\epsilon(\omega) \\
&= \left[1 + \phi^2 - \phi \left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)\right]^{-1} \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi \left(1 + \phi^2 - 2\phi \cos \omega\right)}
\end{aligned}
$$

El proceso MA(1) es

$$y_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} = (1 + \theta L)\epsilon_t$$

Entonces su espectro es

$$\begin{aligned} s_y(\omega) &= \left(1 + \theta e^{i\omega}\right)\left(1 + \theta e^{-i\omega}\right) s_\epsilon(\omega) \\ &= \left[1 + \theta^2 + \theta\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)\right]\frac{\sigma^2}{2\pi} \\ &= \frac{\sigma^2\left(1 + \theta^2 + 2\theta\cos\omega\right)}{2\pi} \end{aligned}$$

El filtro Hodrick-Prescott

Desagregación de una serie de tiempo

- Tenemos una muestra de T observaciones de la variable aleatoria Y_t:

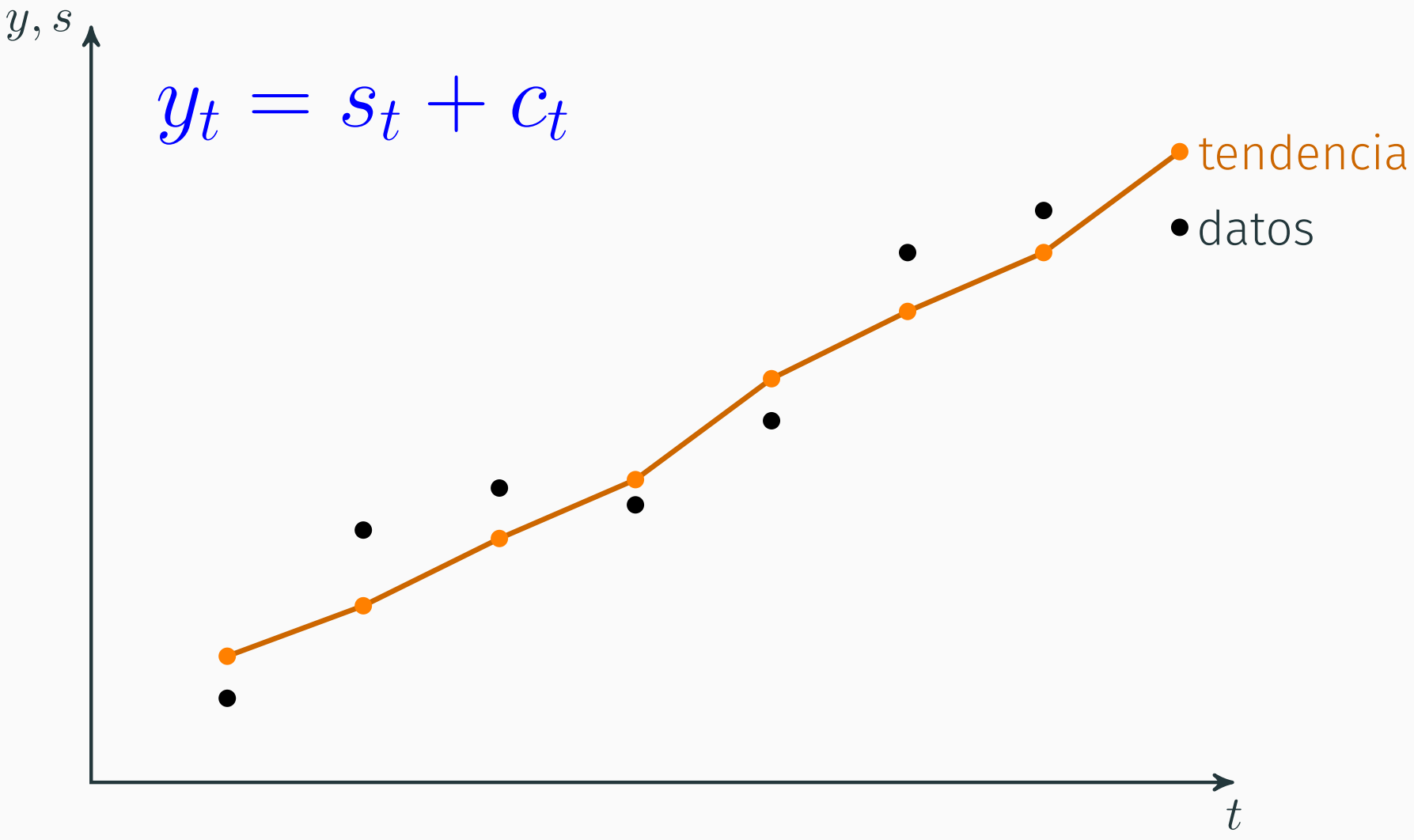
$$\{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$$

- Y_t tiene dos componentes: crecimiento (tendencia) s_t y ciclo c_t.

$$y_t = s_t + c_t$$

- Asumimos que la tentencia es una curva *suave*, aunque no necesariamente una línea recta.

Tendencia en los datos



Objetivos en conflicto

- Para “extraer” la tendencia, buscamos una nueva serie

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_T\},$$

  balanceando estos dos objetivos:

  1. el ajuste a los datos originales
  2. que la tendencia resultante sea suave

- La importancia relativa de estos dos factores se pondera con el parámetro λ.

El filtro Hodrick-Prescott

Formalmente, la tendencia se define por:

$$s_i^{HP} = \underset{s_1,\ldots,s_T}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t=1}^{T} (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[(s_{t+1} - s_t) - (s_t - s_{t-1}) \right]^2 \right\}$$

$$= \underset{s_1,\ldots,s_T}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t=1}^{T} (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} (s_{t+1} - 2s_t + s_{t-1})^2 \right\}$$

Un pequeño truco de algebra lineal

Definamos las matrices

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_T \end{bmatrix}$$

$$A_{T-2\times T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo el problema de optimización

$$s_i^{HP} = \underset{s_1,\ldots,s_T}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t=1}^{T} (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} (s_{t+1} - 2s_t + s_{t-1})^2 \right\}$$

$$= \underset{S}{\operatorname{argmin}} \left\{ (Y - S)'(Y - S) + \lambda (AS)'(AS) \right\}$$

$$= \underset{S}{\operatorname{argmin}} \left\{ Y'Y - 2Y'S + S'(I + \lambda A'A)S \right\}$$

Resolviendo el problema

- Tomando la condición de primer orden

$$S^{HP} = \underset{S}{\operatorname{argmin}} \left\{ Y'Y - 2Y'S + S'(I + \lambda A'A)S \right\}$$

$$\Rightarrow -2Y + 2\left(I + \lambda A'A\right)S = 0$$

- Entonces, el filtro HP es

$$S^{HP} = \left(I + \lambda A'A\right)^{-1} Y \qquad \text{(tendencia)}$$

$$C^{HP} \equiv Y - S^{HP} = \left[I - \left(I + \lambda A'A\right)^{-1}\right] Y \qquad \text{(ciclo)}$$

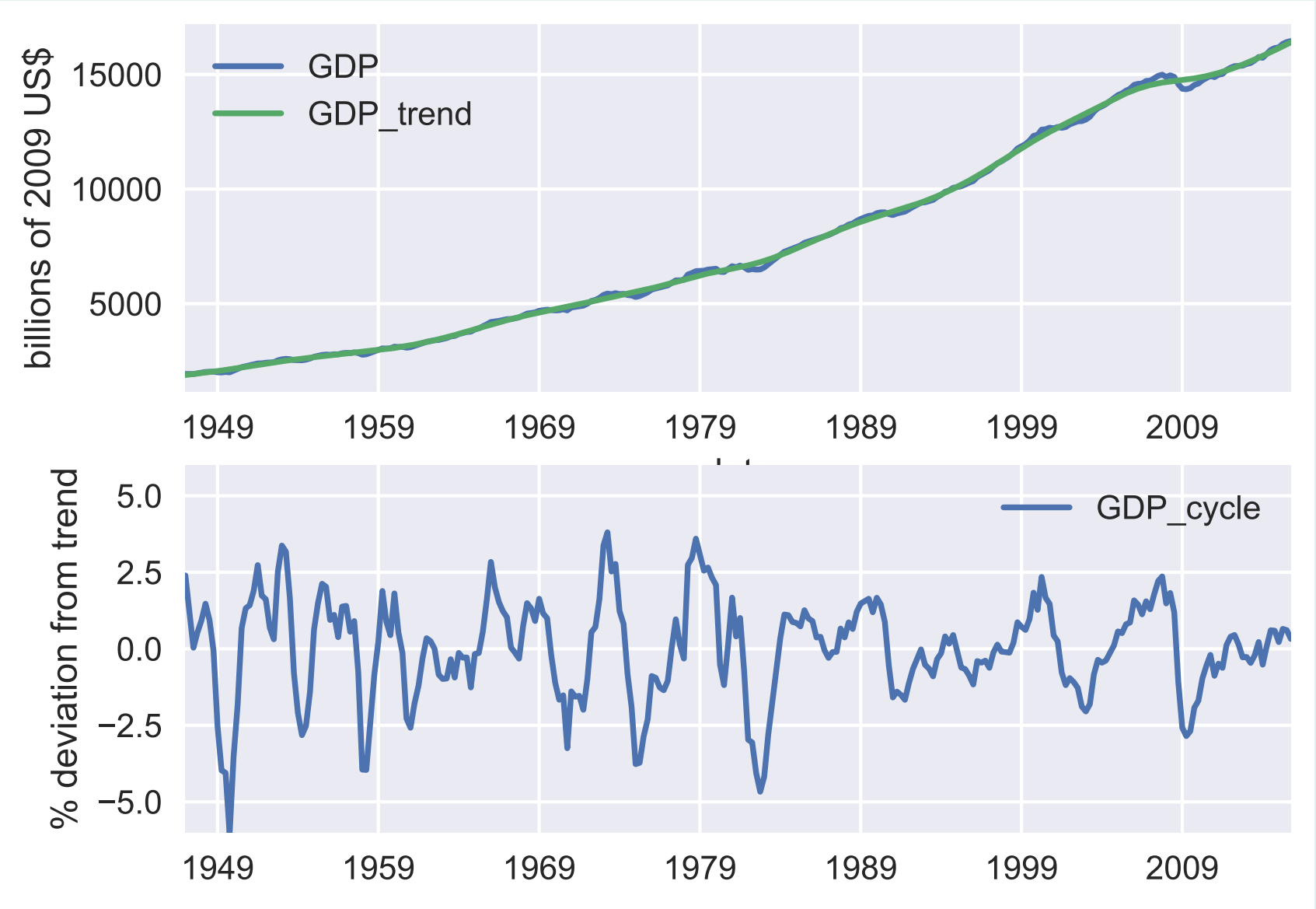
Escogiendo λ

- El resultado de filtrar es muy sensible a la escogencia de λ
- Como regla, el λ que se escoge depende de la frecuencia de los datos
  - Anual $\Rightarrow 100$
  - Trimestral $\Rightarrow 1600$
  - Mensual $\Rightarrow 14400$

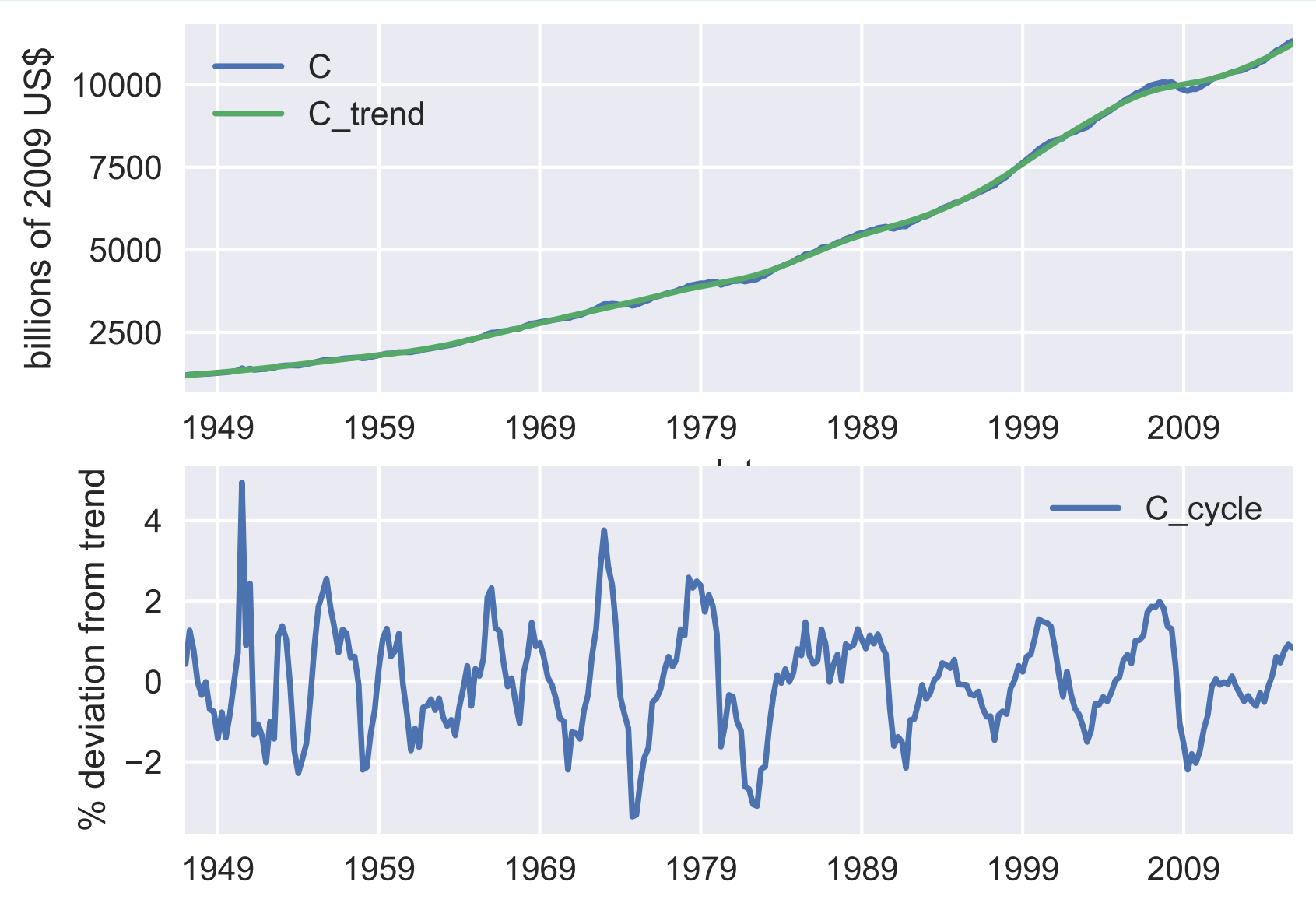
Ejemplo 5:

Series filtradas con $\lambda = 1600$

PIB real EEUU, dólares de 2009



Consumo real EEUU, dólares de 2009



Cogley y Nason 1995

Cuando medimos el componente del ciclo económico de una serie de tiempo, ¿es buena idea utilizar el filtro Hodrick-Prescott?

Sí, si la serie de tiempo es estacionaria alrededor de una tendencia

No, si la serie de tiempo es estacionaria en diferencia

El filtro Hodrick-Prescott, versión asintótica

Si contaramos con infinitas observaciones, la tendencia sería

$$
\begin{aligned}
s_t^{HP} &= \underset{s_t}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(y_t - s_t\right)^2 + \lambda \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(s_{t+1} - 2s_t + s_{t-1}\right)^2 \right\} \\
&= \underset{s_t}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(y_t - s_t\right)^2 + \lambda \left[\left(L^{-1} - 2 + L\right) s_t \right]^2 \right\}
\end{aligned}
$$

La condición de primer orden es

$$
\begin{aligned}
y_t - s_t &= \lambda \left(L - 2 + L^{-1}\right)^2 s_t \\
&= \lambda \left(L^{0.5} - L^{-0.5}\right)^4 s_t \\
\Rightarrow s_t &= \left[1 + \lambda \left(L^{0.5} - L^{-0.5}\right)^4\right]^{-1} y_t
\end{aligned}
$$

El componente cíclico

El componente cíclico del filtro HP es

$$c_t^{HP} = \frac{\lambda \left(L^{0.5} - L^{-0.5}\right)^4}{1 + \lambda \left(L^{0.5} - L^{-0.5}\right)^4} y_t$$

Es decir, podemos escribir el filtro HP (asintótico) como $c_t^{HP} = A(L)y_t$, donde

$$A(L) = \frac{\lambda \left(L^{0.5} - L^{-0.5}\right)^4}{1 + \lambda \left(L^{0.5} - L^{-0.5}\right)^4} = \frac{\lambda B(L)}{1 + \lambda B(L)} = \frac{\lambda L^{-2}(1-L)^4}{1 + \lambda B(L)}$$

Note que $B(L^{-1}) = B(L)$, y por tanto $A(L^{-1}) = A(L)$

Espectro de una serie filtrada por HP

Note que

$$B\left(e^{i\omega}\right) = \left(e^{0.5i\omega} - e^{-0.5i\omega}\right)^4 = \left(2i\sin\frac{\omega}{2}\right)^4 = 16\sin^4\frac{\omega}{2}$$

Así, el espectro de la serie filtrada está relacionado con el de la serie original por

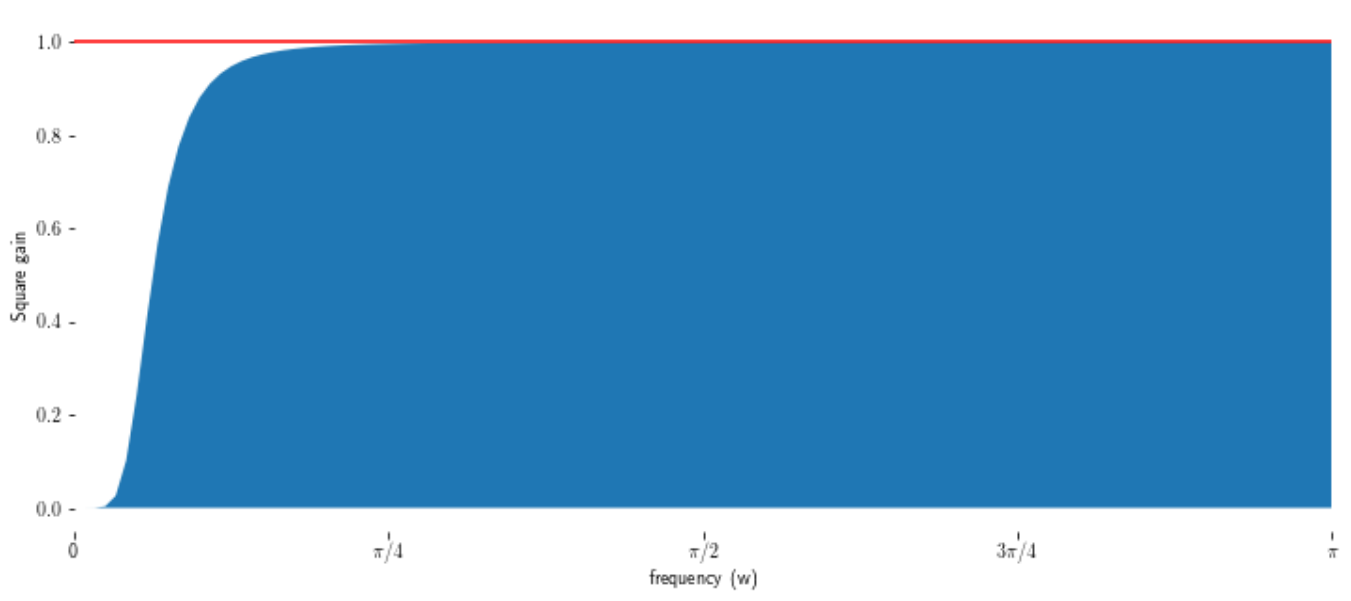
$$s_c(\omega) = \left(\frac{16\lambda\sin^4\frac{\omega}{2}}{1+16\lambda\sin^4\frac{\omega}{2}}\right)^2 s_y(\omega)$$

Ganancia cuadrática del filtro HP

La ganancia cuadrática del filtro HP es

$$\left(\frac{16\lambda \sin^4 \frac{\omega}{2}}{1 + 16\lambda \sin^4 \frac{\omega}{2}}\right)^2$$

El filtro remueve los ciclos de baja frecuencia, pero no altera los de frecuencia media o alta.



¿Descomposición espectral de un proceso no estacionario?

- En la práctica, el filtro HP se aplica a series no estacionarias (después de todo, fue diseñado para separar tendencia de ciclo!)
- Sin embargo, la representación espectral de un proceso no estacionario no está definida!
- Para estudiar los efectos de filtrar las series, imagine que el filtro es un procedimiento que realiza dos operaciones:
  1. Estacionariza la serie con una transformación apropiada
  2. Trabaja en el componente estacionario.
- Entonces es posible analizar el efecto del filtro sobre el componente cíclico estudiando la segunda operación.

Filtrando un proceso estacionario alrededor de tendencia

$$
\begin{aligned}
c_t^{HP} &= A(L)X_t \\
&= A(L)\left(\alpha + \beta t + S_t\right) \\
&= A(L)\left(\alpha + \beta t\right) + A(L)S_t \\
&= \frac{\lambda L^{-2}(1-L)^4}{1+\lambda B(L)}\left(\alpha + \beta t\right) + A(L)S_t \\
&= \frac{\lambda L^{-2}(1-L)^2}{1+\lambda B(L)}(1-L)^2\left(\alpha + \beta t\right) + A(L)S_t \\
&= A(L)S_t
\end{aligned}
$$

Es decir, aplicar el filtro HP a un proceso TS es equivalente a filtrar solo su componente (cíclico) estacionario.

Filtrando un proceso estacionario en diferencia

$$
\begin{aligned}
c_t^{HP} &= A(L)Z_t \\
&= A(L)(1-L)^{-1}S_t \\
&= (1-L)^{-1}A(L)S_t
\end{aligned}
$$

- Es decir, aplicar el filtro HP a un proceso DS no es equivalente a filtrar solo su componente (cíclico) estacionario.
- Equivale a aplicar el filtro $(1-L)^{-1}$ luego de haber aplicado el filtro $A(L)$.
- La ganancia cuadrática de este segundo filtro es

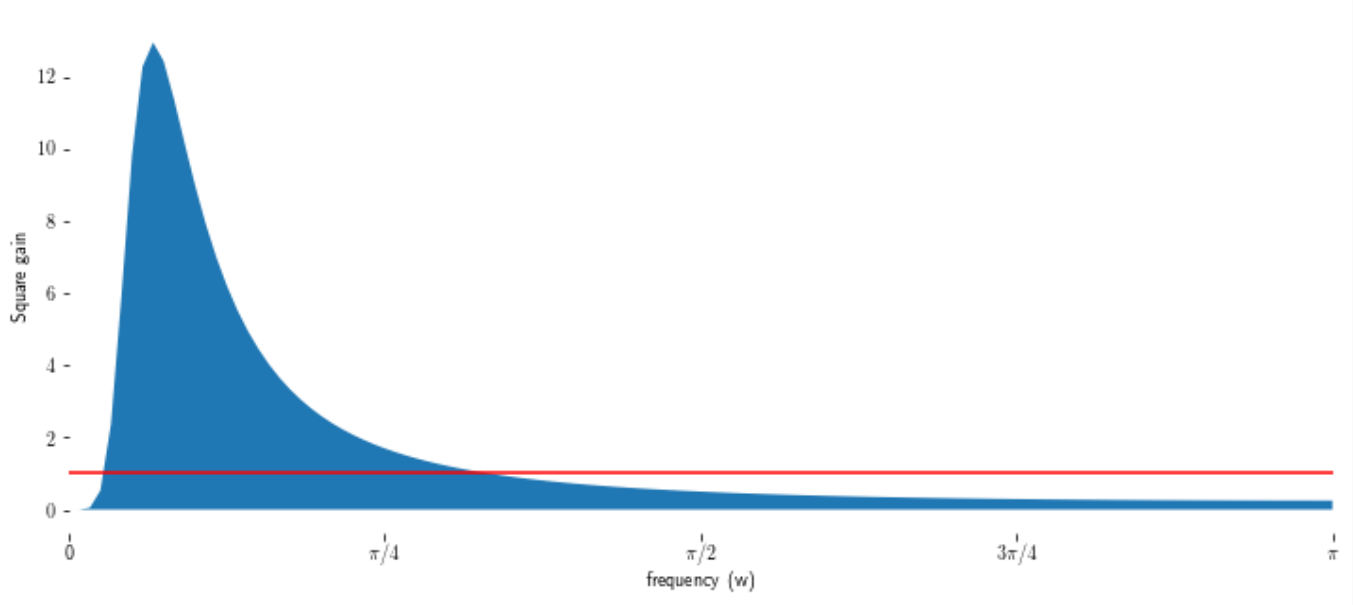
$$
\frac{1}{2\left(1-\cos\omega\right)} = \frac{1}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}^2\right)}
$$

Ganancia cuadrática del filtro HP, aplicado a serie DS

En este caso la ganancia cuadrática es

$$\left(\frac{8\lambda \sin^3 \frac{\omega}{2}}{1 + 16\lambda \sin^4 \frac{\omega}{2}}\right)^2$$

El filtro aumenta excesivamente la volatilidad de los ciclos de media frecuencia!!!



Lección

- La aplicación del filtro Hodrick-Prescott a procesos estacionarios en diferencia potencialmente sesgará los resultados que se obtienen de la evaluación de modelos RBC.

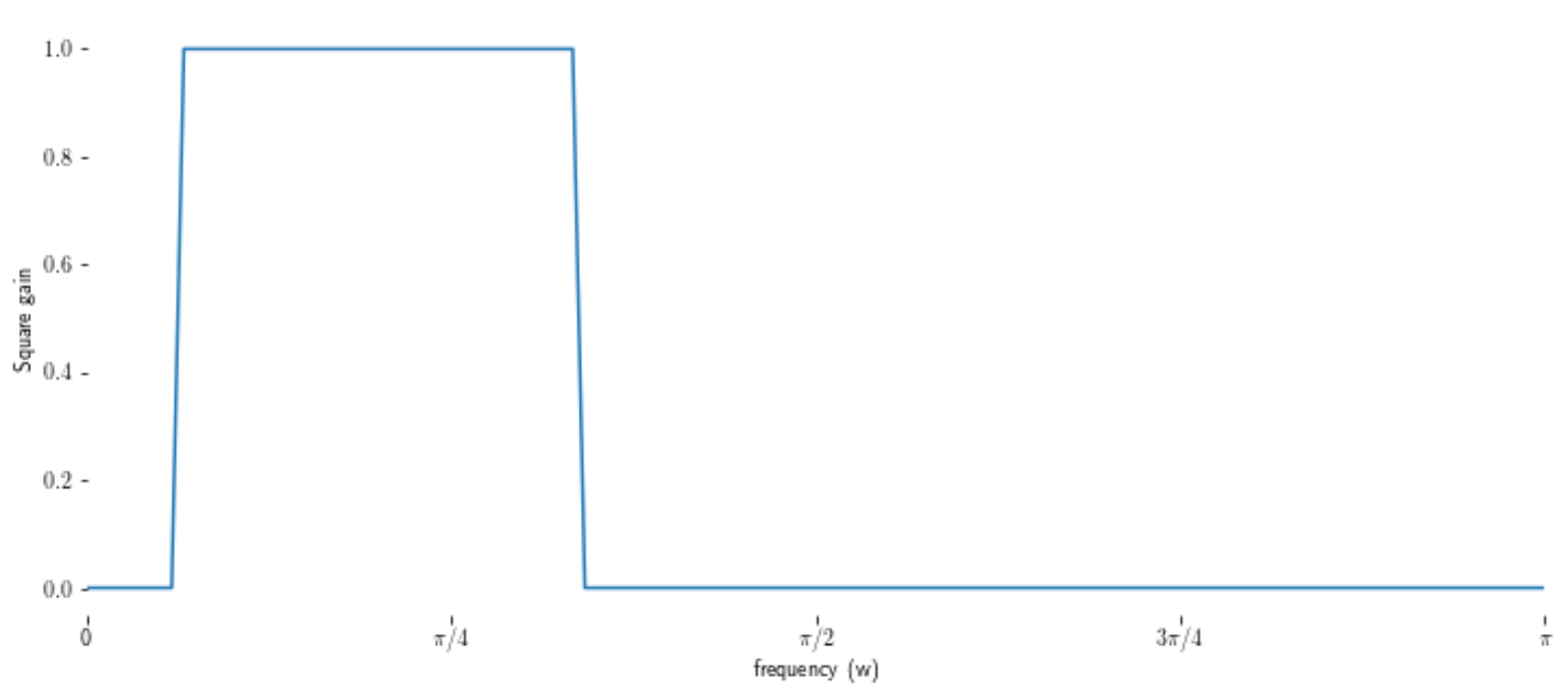
El filtro Baxter-King

Requisitos para un filtro

- Debe extraer un rango especificado de periodicidades, dejando las otras intactas
- El filtro “band-pass” ideal no debe introducir cambios de fase
- El filtro debe ser una aproximación óptima del filtro “band-pass” ideal
- La aplicación del filtro aproximado a una serie con tendencia debe resultar en una serie estacionaria
- El filtro debe extraer componentes del ciclo real que no están relacionados al tamaño de muestra
- El método debe ser operacional

El filtro ideal

- Burns y Mitchell (NBER) definen los ciclos reales como componentes cíclicos con una duración de al menos 6 trimestres, y típicamente no más de 32 trimestres.
- El filtro ideal debe extraer las frecuencias $\omega \in \left[\frac{2\pi}{32}, \frac{2\pi}{6}\right]$



El filtro “low pass” ideal

- El filtro “low pass” ideal $\beta(\omega)$ debe ser tal que

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \underline{\omega} \\ 0, & |\omega| > \underline{\omega} \end{cases}$$

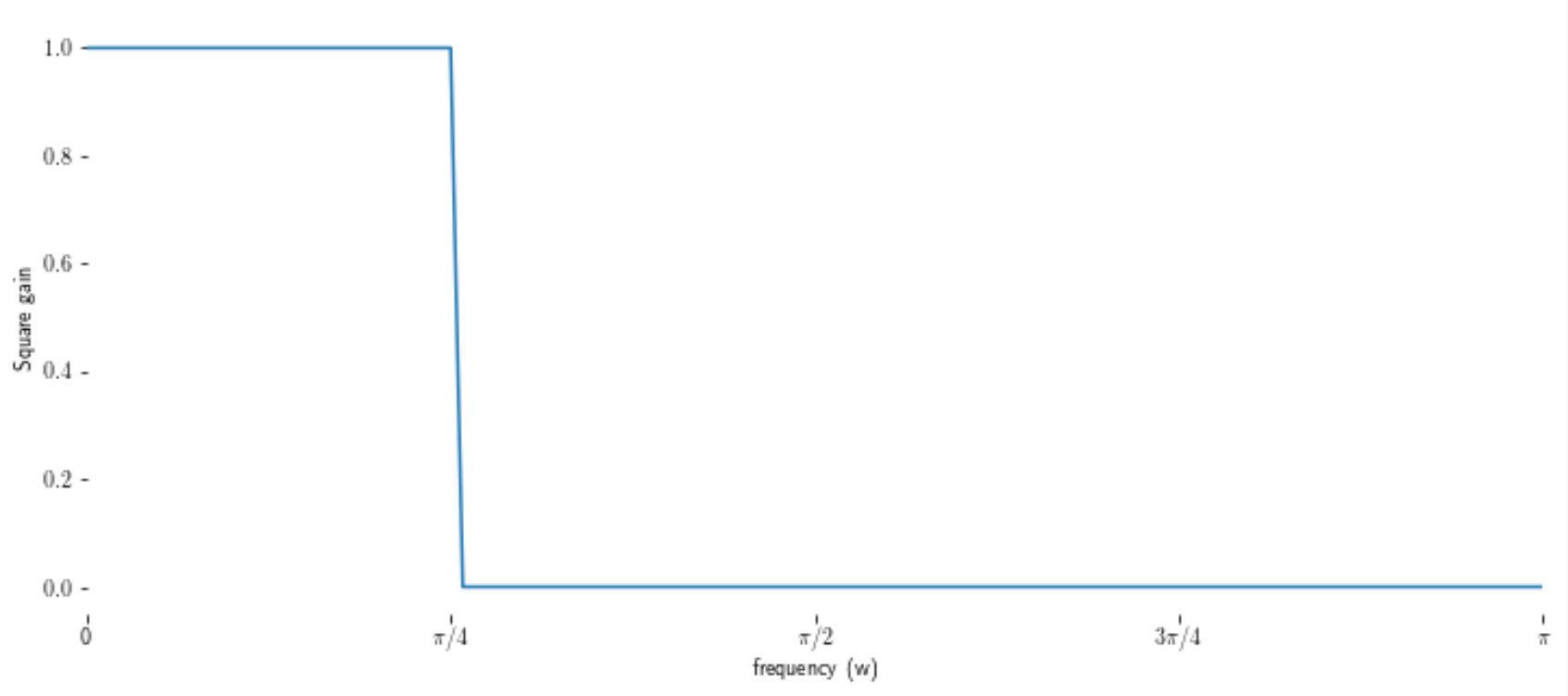
- En dominio temporal este filtro ideal sería

$$b(L) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h L^h$$

donde

$$b_0 = \frac{\underline{\omega}}{\pi} \qquad \text{y} \qquad b_h = \frac{\sin(h\underline{\omega})}{h\underline{\omega}}, \quad \text{para } h = 1, 2, \ldots$$

El filtro “low pass” ideal: ilustración



El filtro “low pass” óptimo

- El filtro “low pass” óptimo para K rezagos se optiene truncando el filtro ideal al rezago K.
- Así, el filtro óptimo es

$$b(L) = \sum_{h=-K}^{K} b_h L^h$$

donde

$$b_0 = \frac{\underline{\omega}}{\pi} \qquad \text{y} \qquad b_h = \frac{\sin(h\underline{\omega})}{h\underline{\omega}}, \quad \text{para } h = 1, 2, \ldots, K$$

El filtro “high pass” ideal

- El filtro “high pass” ideal $\beta(\omega)$ debe ser tal que

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \bar{\omega} \\ 1, & |\omega| > \bar{\omega} \end{cases}$$

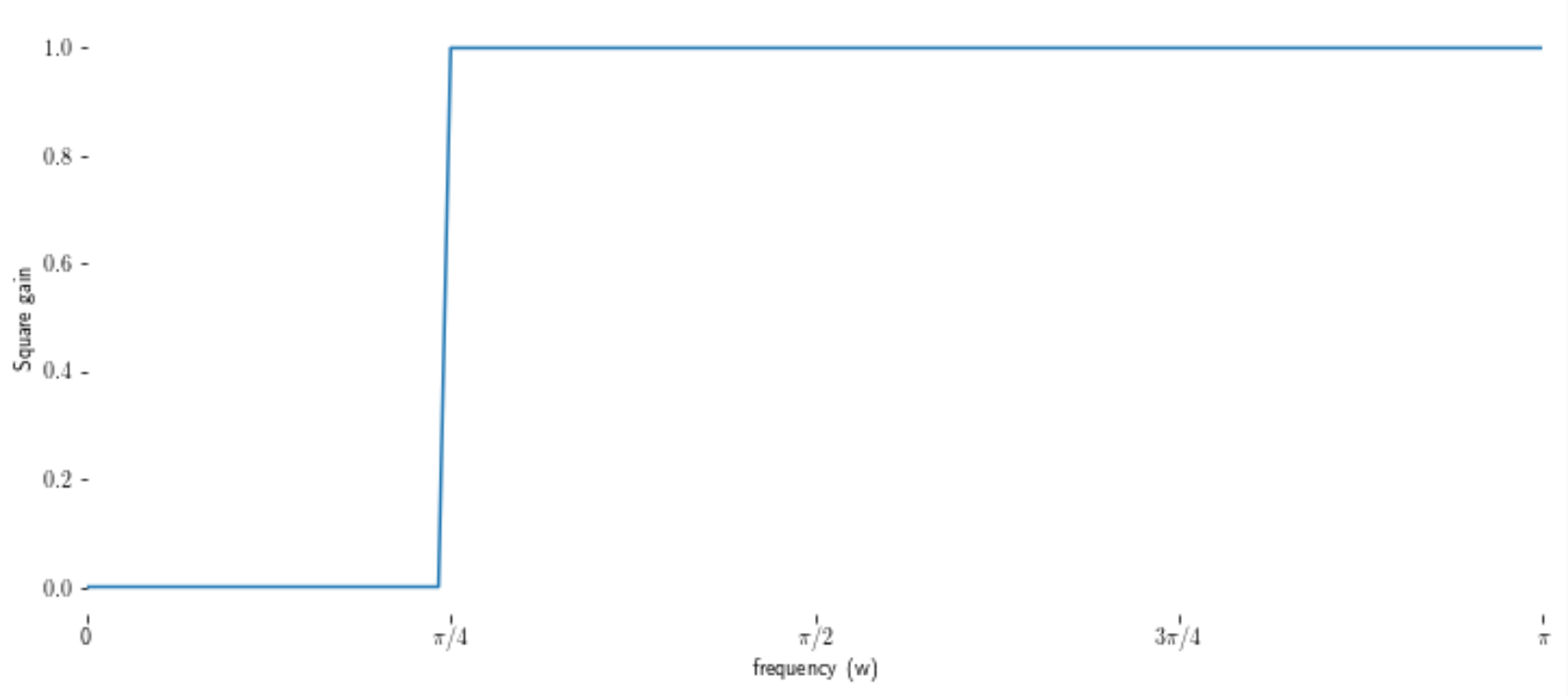
- En dominio temporal este filtro ideal sería

$$a(L) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h L^h$$

donde

$$a_0 = 1 - b_0 = 1 - \frac{\bar{\omega}}{\pi} \quad \text{y} \quad a_h = -b_h = -\frac{\sin(h\bar{\omega})}{h\bar{\omega}}, \quad \text{para } h = 1, 2, \ldots$$

El filtro “high pass” ideal: ilustración



El filtro “high pass” óptimo

- El filtro “high pass” óptimo para K rezagos se optiene truncando el filtro ideal al rezago K.
- Así, el filtro óptimo es

$$a(L) = \sum_{h=-K}^{K} a_h L^h$$

donde

$$a_0 = 1 - \frac{\bar{\omega}}{\pi} \qquad \text{y} \qquad a_h = -\frac{\sin(h\bar{\omega})}{h\bar{\omega}}, \quad \text{para } h = 1, 2, \ldots, K$$

El filtro “band pass” ideal

- El filtro “band pass” ideal $\beta(\omega)$ es una combinación de un filtro “low-pass” y uno “high-pass”

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 1, & \underline{\omega} \leq |\omega| \leq \bar{\omega} \\ 0, & \text{de lo contario} \end{cases}$$

- En dominio temporal este filtro ideal sería

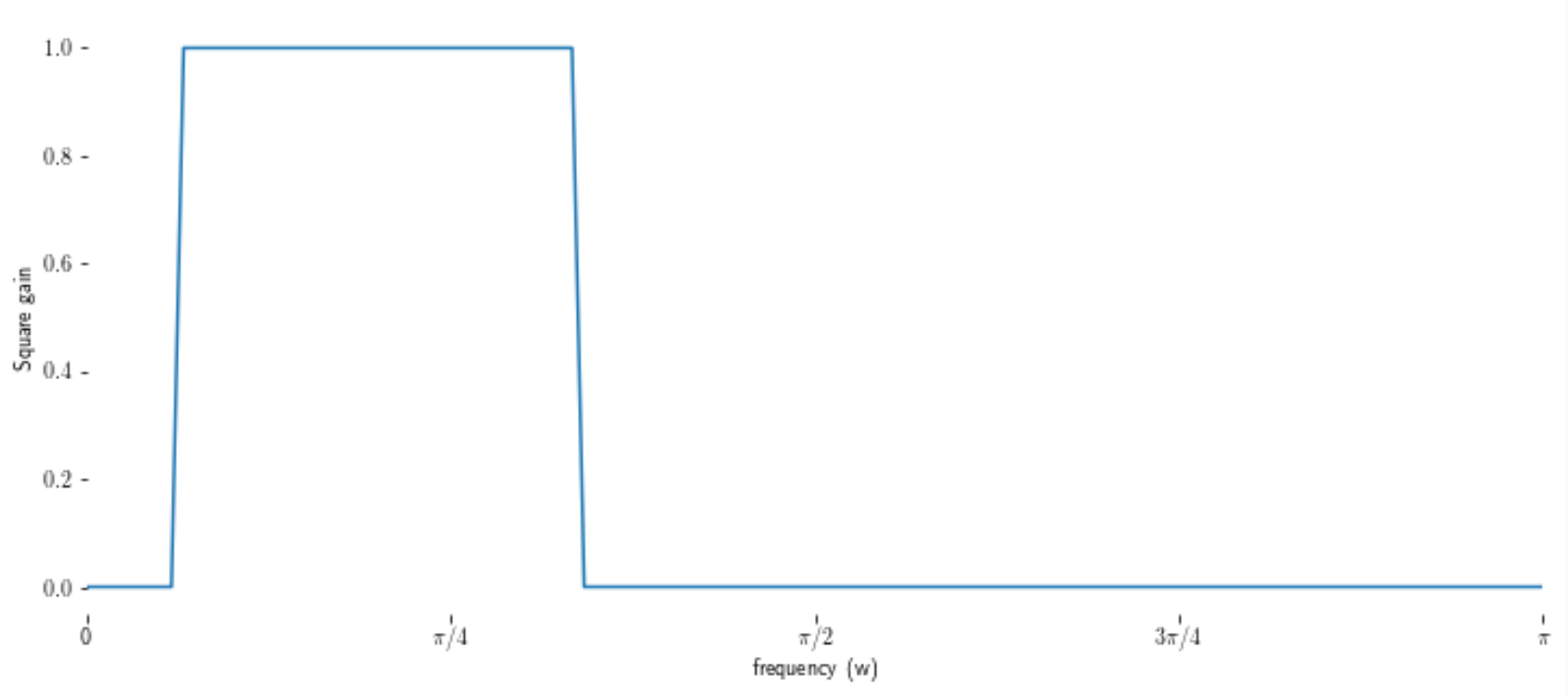
$$a(L) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h L^h$$

donde

$$a_h = \bar{b}_h - \underline{b}_h$$

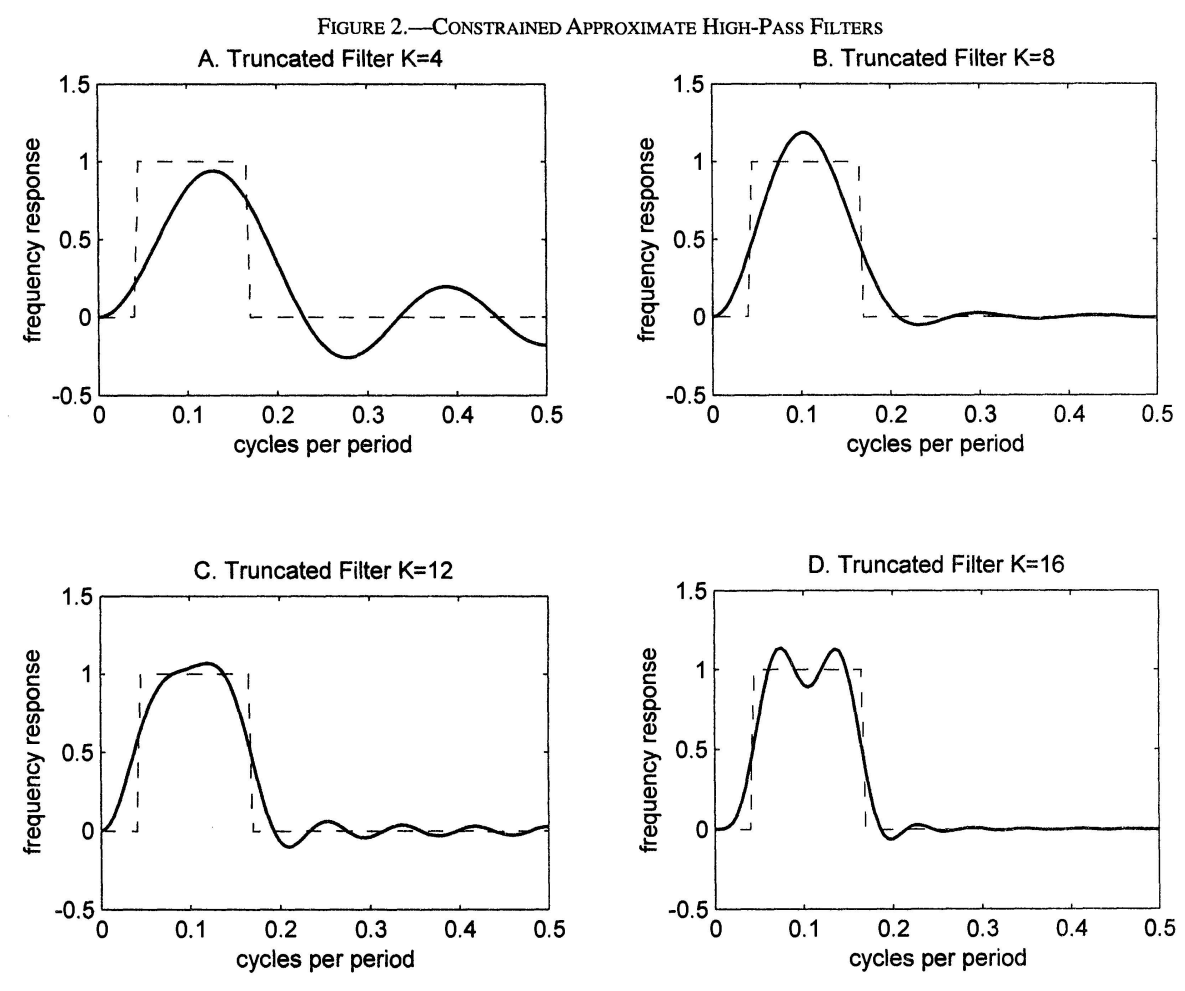
donde $\bar{b}$ y $\underline{b}$ son los coeficientes de los filtros low-pass con $\bar{\omega}$ y $\underline{\omega}$

El filtro “high pass” ideal: ilustración



El filtro “band pass” óptimo

- El filtro “band pass” óptimo para K rezagos se optiene truncando el filtro ideal al rezago K.



Referencias

- Baxter, Marianne y Robert G. King (1999). “Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series”. En: *The Review of Economics and Statistics* 81.4, págs. 575-593.
- Cogley, Timothy y James M. Nason (1995). “Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series Implications for business cycle research”. En: *Journal of Economic Dynamics and Control* 19.1–2, págs. 253-278. ISSN: 0165-1889.
- Hodrick, Robert J. y Edward C. Prescott (1997). “Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation”. En: *Journal of Money, Credit and Banking* 29.1, págs. 1-16. ISSN: 00222879, 15384616.