

# Introducción a la estimación de sistemas de ecuaciones

Randall Romero Aguilar, PhD

[randall.romero@ucr.ac.cr](mailto:randall.romero@ucr.ac.cr)

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 25 de mayo de 2020

**UCR**  
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

**ESCUELA de  
ECONOMÍA**  
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

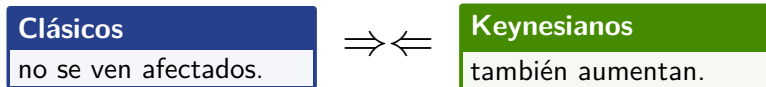
# Tabla de contenidos

1. Motivación
2. El modelo SUR

# 1. Motivación

# ¿Cómo afecta el dinero al producto? Keynesianos vs Clásicos\*

Cuando la oferta de dinero aumenta, el empleo y el producto real...



En palabras de Lucas (1996):

*Esta tensión entre dos ideas incompatibles —que cambios en dinero son cambios neutrales de unidades, y que inducen movimientos en empleo y producción de la misma dirección— ha estado en el centro de la teoría monetaria al menos desde Hume (1752).*

- ▶ Para resolver este problema, un econometrista estima el modelo

$$y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$$

donde  $m$  es dinero,  $y$  es producto,  $z$  una variable de control.

- ▶ Si  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ , los keynesianos estarían en problemas.
- ▶ Si  $\alpha_0 > 0$ , los clásicos estarían en problemas.

# Una regla de política monetaria

- ▶ Suponga que el banco central desea estabilizar el producto alrededor de  $\bar{y}$ .
- ▶ Para ello fija la oferta de dinero así:

$$\begin{aligned}m_t^* &= \operatorname{argmin}_{m_t} \mathbb{E} (y_t - \bar{y})^2 \\ &= \operatorname{argmin}_{m_t} \mathbb{E} (\alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t)^2 \\ &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} m_{t-1} - \frac{c_1}{\alpha_0} z_{t-1}\end{aligned}$$

donde se supone que el banco central espera  $\mathbb{E} z_t = 0$ .

- ▶ La regla de política sería

$$m_t^* = \pi_1 m_{t-1} + \pi_2 z_{t-1} + \nu_t$$

Ahora suponga que el producto real depende solo de cambios **sorpresivos** en la oferta de dinero  $v_t$ :

$$y_t = \bar{y} + d_0 v_t + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t$$

Pero la regla de política implica  $v_t = m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}$ .

Entonces:

$$\begin{aligned} y_t &= \bar{y} + d_0 [m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}] + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t \\ &= \bar{y} + d_0 m_t - d_0 \pi_1 m_{t-1} + d_1 z_t + (d_2 - d_0 \pi_2) z_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

El econometrista compara los dos modelos:

**keynes**  $y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$

**clásico**  $y_t = \bar{y} + d_0 m_t - d_0 \pi_1 m_{t-1} + d_1 z_t + (d_2 - d_0 \pi_2) z_{t-1} + u_t$

- ▶ La estimación de la regresión no puede distinguir entre las dos hipótesis propuestas: los modelos resultan en regresiones **observacionalmente equivalentes**.
- ▶ Los parámetros estimados pueden depender de la regla de política.
- ▶ Así, el ejercicio estaría sujeto a la crítica de Lucas (1976): **no podemos predecir qué pasaría si cambia la política, porque el modelo podría no ser invariante a la política misma.**



- ▶ Suponga que el econometrista se conforma con estimar el modelo

$$y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$$

y que  $z_t$  es el déficit fiscal.

- ▶ Si  $\tau$  es la tasa impositiva media y el gasto público  $\bar{g}$  es constante, entonces:

$$z_t = \bar{g} - \tau y_t$$

- ▶ En este caso, estimar el modelo por OLS resulta en **estimadores sesgados e inconsistentes!**

Nota:

Sesgo de simultaneidad

- ▶ Considere el modelo

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \epsilon$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

- ▶ Esto implica que  $Y_t = \frac{\alpha + I_t}{1 - \beta} + \frac{\epsilon_t}{1 - \beta}$ .
- ▶ Si se estima la primera ecuación por OLS, la estimación será **inconsistente** porque

$$\text{Cov}(Y_t, \epsilon_t) = \text{Cov}\left(\frac{\epsilon_t}{1 - \beta}, \epsilon_t\right) = \frac{1}{1 - \beta} \text{Var}(\epsilon_t) \neq 0$$

# Un modelo de ecuaciones simultáneas (VAR estructural)

- ▶ Dado que en modelos macro las variables son endógenas, es necesario considerar un sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_0 & -c_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ m_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ 0 \\ \bar{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & c_1 \\ 0 & \pi_1 & \pi_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ m_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t \\ \nu_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Su estimación exige imponer (muchas) restricciones. Por ejemplo, acá imponemos la restricción de que  $z_t$  no afecta a  $m_t$  en el mismo período.

Según Sims (1980, pp.14-15)

*Debido a que los grandes modelos existentes contienen demasiadas restricciones increíbles, la investigación empírica dedicada a probar teorías macroeconómicas alternativas con demasiada frecuencia procede en un marco de una o pocas ecuaciones. Esta razón es suficiente para que valga la pena investigar la posibilidad de crear grandes modelos en un estilo que no tienda a acumular restricciones tan caprichosamente... Debe ser factible estimar modelos macro de gran escala como formas reducidas sin restricciones, tratando todas las variable como endógenas.*

# Un vector autor-regresivo (VAR)

Así, lo que Sims (1980) propone<sup>†</sup> es estimar

$$\begin{aligned}y_t &= \bar{y} + \alpha_{11}y_{t-1} + \alpha_{12}m_{t-1} + \alpha_{13}z_{t-1} + u_t^y \\m_t &= \bar{m} + \alpha_{21}y_{t-1} + \alpha_{22}m_{t-1} + \alpha_{23}z_{t-1} + u_t^m \\z_t &= \bar{z} + \alpha_{31}y_{t-1} + \alpha_{32}m_{t-1} + \alpha_{33}z_{t-1} + u_t^z\end{aligned}$$

- ▶ Este es un **modelo reducido**: Las variables  $y_t, m_t, z_t$  no interactúan contemporáneamente.
- ▶ También es un **modelo SUR**: todas las ecuaciones tienen los mismos regresores; los errores están correlacionados.
- ▶ Al ser un modelo SUR con regresores idénticos, **puede estimarse con OLS ecuación por ecuación**.

En este curso aprenderemos:

- ▶ la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- ▶ la estimación y uso de los modelos VAR y VECM:
  - ▶ causalidad de Granger
  - ▶ funciones de impulso respuesta
  - ▶ descomposición de varianza
  - ▶ pronósticos
  - ▶ cointegración
  - ▶ modelos estructural, recursivo, y reducido.

## 2. El modelo SUR



- ▶ Hay modelos uniecuacionales que aplican a un grupo de variables relacionadas.
- ▶ Ejemplos:
  - ▶ Modelo CAPM

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + \beta_i (r_{Mt} - r_{ft}) + \epsilon_{it}$$

- ▶ Modelos de inversión

$$I_{it} = \beta_{1i} + \beta_{2i}F_{it} + \beta_{3i}C_{it} + \epsilon_{it}$$

- ▶ Como los errores  $\epsilon_{it}$  de las distintas ecuaciones pueden estar correlacionados, es preferible considerar los modelos de manera conjunta.

# Modelo de regresiones aparentemente no relacionadas (SUR)

- ▶ En este modelo se presentan un grupo de variables dependientes, pero **NO simultáneas**.
- ▶ Cada ecuación puede tener sus propias variables explicativas o éstas pueden ser las mismas para todas las ecuaciones.

# El modelo SUR: ecuaciones no simultáneas

Las ecuaciones del sistema son

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 \beta_1 + \epsilon_1 \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 \beta_2 + \epsilon_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_M = \mathbf{x}_M \beta_M + \epsilon_M \end{cases}$$

que se pueden expresar como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_M \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Y}$   $\mathbf{x}$   $\beta$   $\epsilon$

Se asume que perturbaciones de distintas observaciones no están correlacionadas, aunque las perturbaciones de distintas ecuaciones sí pueden estar correlacionados:

$$\mathbb{E} [\epsilon_i \epsilon'_j | \mathbf{x}] = \sigma_{ij} I$$

o bien

$$\mathbb{E} [\underbrace{\epsilon \epsilon' | \mathbf{x}}_{\Omega}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I & \sigma_{12} I & \dots & \sigma_{1M} I \\ \sigma_{21} I & \sigma_{22} I & \dots & \sigma_{2M} I \\ & & \ddots & \\ \sigma_{M1} I & \sigma_{M2} I & \dots & \sigma_{MM} I \end{bmatrix}$$

$\Sigma \otimes I$

Nota:

El producto Kronecker

- ▶ Si  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  y  $B$  son matrices, el producto Kronecker se define por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{bmatrix}$$

- ▶ Algunas propiedades importantes:

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

El modelo SUR

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{x}\beta + \epsilon \\ \mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{x}] &= 0 \\ \text{Var}[\epsilon|\mathbf{x}] &= \Omega = \Sigma \otimes I \end{aligned} \right\} \text{supuestos del modelo generalizado de regresión lineal!}$$

puede ser estimado por FGLS:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{\text{GLS}} &= [\mathbf{x}'\Omega^{-1}\mathbf{x}]^{-1}\mathbf{x}'\Omega^{-1}\mathbf{Y} \\ &= [\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{x}]^{-1}\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \end{aligned}$$

- ▶ Si todas las regresiones tienen los mismos regresores, estimar el sistema SUR por GLS es equivalente a estimar ecuación por ecuación con OLS.
- ▶ Este resultado justifica que un VAR sin restricciones se estima ecuación por ecuación con OLS.



## SUR: las regresiones tienen los mismos regresores

En el caso especial  $\mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_M = \mathbb{X}$  tenemos






$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{X} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{X} \end{bmatrix} = I \otimes \mathbb{X}$$

y el estimador GLS es

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{\text{GLS}} &= [\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1} \mathbf{x}]^{-1} \mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1} \mathbf{Y} \\ &= [(I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}(I \otimes \mathbb{X})]^{-1} (I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1} \mathbf{Y} \\ &= [(I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)(I \otimes \mathbb{X})]^{-1} (I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I) \mathbf{Y} \\ &= [\Sigma^{-1} \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})]^{-1} [\Sigma^{-1} \otimes \mathbb{X}'] \mathbf{Y} \\ &= [\Sigma \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}] [\Sigma^{-1} \otimes \mathbb{X}'] \mathbf{Y} \\ &= [I \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}'] \mathbf{Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}^{\text{GLS}} &= [I \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'] \mathbf{Y} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_M \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' \mathbf{y}_1 \\ (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' \mathbf{y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^{\text{OLS}} \\ \hat{\beta}_2^{\text{OLS}} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_M^{\text{OLS}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si todas las regresiones tienen los mismos regresores, el sistema SUR puede estimarse con OLS ecuación por ecuación.

-  Greene, William H. (2012). *Econometric Analysis*. 7ª ed. Prentice Hall. ISBN: 978-0-13-139538-1.
-  Lucas, Robert E. (1996). "Nobel Lecture: Monetary Neutrality". En: *Journal of Political Economy* 104.4, págs. 661-682.
-  Lucas, Robert Jr (ene. de 1976). "Econometric policy evaluation: A critique". En: *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 1.1, págs. 19-46.
-  Sims, Christopher A. (ene. de 1980). "Macroeconomics and Reality". En: *Econometrica* 48.1.
-  Walsh, Carl E. (2010). *Monetary Theory and Policy*. 3ª ed. MIT Press. ISBN: 978-0262-013772.