Cambio estructural

Randall Romero Aguilar, PhD

randall.romero@ucr.ac.cr

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 20 de mayo de 2020

Tabla de contenidos

1. Introducción

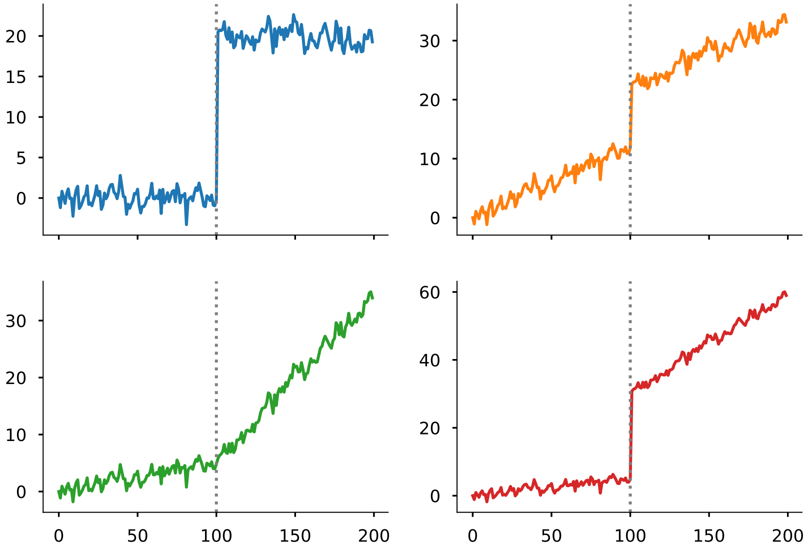
La crítica de Lucas

- En 1976 Lucas publicó una de las críticas más fuertes al enfoque de modelación económica de gran escala de la Comisión Cowles.
- Lucas criticó el supuesto de que muchos fenómenos económicos son estructurales.
- En esencia, argumentaba que cambios en las leyes y regulaciones afectaban el comportamiento humano, y que esto se reflejaría en los datos.
- Por ejemplo, en una estimación de consumo

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \epsilon_t$$

la propensión marginal a consumir β podría cambiar con el tiempo.

Cambio estructural en una serie de tiempo



2. La prueba de Chow

Determinando si hay un cambio estructural

- Recordemos que podemos expresar una regresión lineal como

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_1 x_{t,1} + \cdots + \beta_k x_{t,k} + \epsilon \\ &= \begin{bmatrix} x_{t,1} & \dots & x_{t,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \epsilon_t \\ &= x_t' \beta + \epsilon_t \end{aligned}$$

- Cuando apilamos todas T las observaciones

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'\beta + \epsilon_1 \\ \vdots \\ x_T'\beta + \epsilon_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_T' \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_T \end{bmatrix} = X\beta + \epsilon$$

- La regresión $Y = X\beta + \epsilon$ asume que el vector de coeficientes β es el mismo para toda la muestra.
- Supongamos que pensamos que durante el período conocido hubo un cambio estructural en la economía, por lo que el vector de parámetros fue β_0 antes del cambio pero β_1 después. Entonces:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1\beta_1 + \epsilon_1, & \text{antes del cambio} \\ Y_2 = X_2\beta_2 + \epsilon_2, & \text{después} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

- Por lo que el estimador de mínimos cuadrados ordinarios

$$\widehat{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & 0 \\ 0 & X_2'X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1'Y_1 \\ X_2Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

- Esto nos dice que los parámetros β_1 y β_2 pueden estimarse por MCO separadamente.
- Planteamos la hipótesis nula de que no hay cambio estructural: $\beta_1 = \beta_2$. Entonces

$$\begin{cases} Y_1 = X_1\beta + \epsilon_1, & \text{antes del cambio} \\ Y_2 = X_2\beta + \epsilon_2, & \text{todo sigue igual} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

- Esto corresponde a la regresión con todas las observaciones.
- La hipótesis $\beta_1 = \beta_2$ puede comprobarse con un test de Wald.

La prueba de Chow

- Sea S la suma de los cuadrados de los residuos de la regresión restringida, y S_i la suma de los cuadrados de los residuos de la regresión de la muestra i.

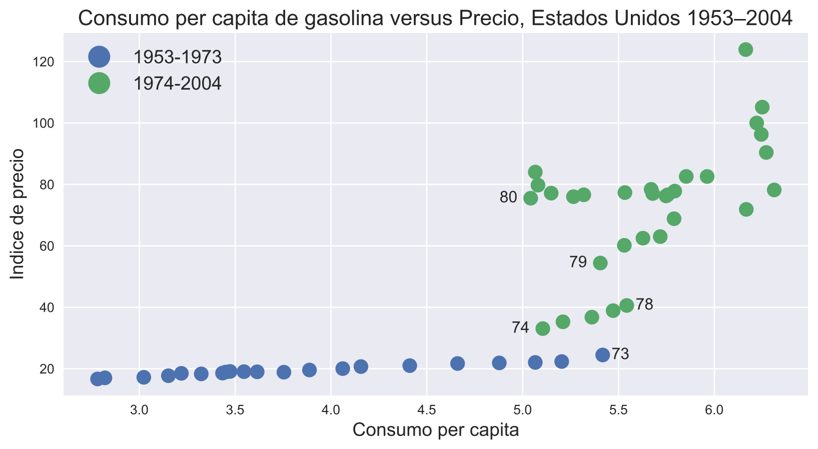
Prueba de cambio estructural de Chow

	¿Son los coeficientes β_1 y β_2 distintos?
H_0	$\beta_1 = \beta_2$
Test	$\dfrac{\frac{S - S_1 - S_2}{k}}{\frac{S_1 + S_2}{T - 2k}} \sim F(k, T - 2k)$
	Si el estadístico es grande (mayor que el valor crítico), los modelos son distintos, por lo que sí hay cambio estructural.

Ejemplo 1:

Cambio en la demanda por combustible

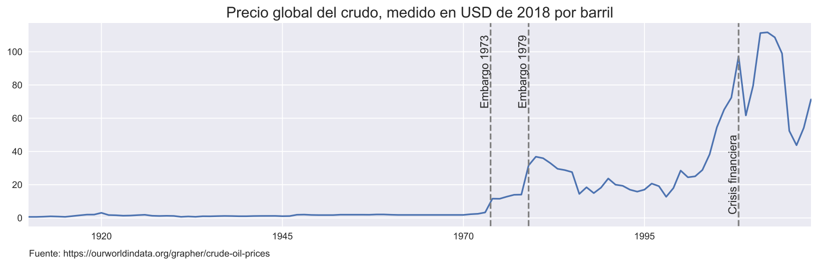
- `TableF2-2.txt`
- `Greene-gas-market.ipynb`


Consumo per capita de gasolina versus Precio, Estados Unidos 1953–2004
1953-1973
1974-2004
Indice de precio
Consumo per capita
120
100
80
60
40
20
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
80
79
78
74
73

El mercado del petróleo tuvo un cambio significativo en 1973:

Antes de 1973, el comercio de petróleo estaba dominado por las "Siete Hermanas", que controlaba $\approx 85\%$ de la reservas de petróleo

Desde la guerra de Yom Kippur (oct-1973), la OPEP ha dominado activamente en la fijación del precio.



Greene (2012) estima el modelo el consumo per capita de combustible G

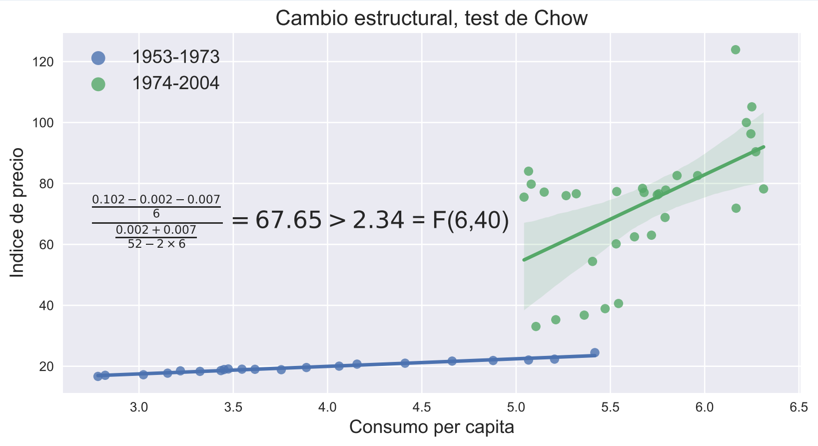
$$G_t = \beta_1 + \beta_2 I_t + \beta_3 PG_t + \beta_4 PNC_t + \beta_5 PUC_t + \beta_6 t + \epsilon_t$$

(todas las variables en logaritmo, excepto t) y comprueba si hay un cambio estructural en 1974.

	1953-2004		1953-1973		1974-2004		descripción
intercepto	-12.863	*	-8.349	*	-1.513		intercepto
I	1.625	*	0.848	*	0.374	*	ingreso per capita
PG	-0.054		-0.032		-0.124	*	precio combustible
PNC	-0.083		0.699	*	-0.001		precio carro nuevo
PUC	-0.085		-0.291	*	-0.022		precio carro usado
t	-0.014	*	0.010	*	0.004		tendencia
R^2	0.965		0.997		0.953		R^2
S	0.102		0.002		0.007		suma residuos^2

* significativo al 5%

La prueba de Chow confirma que hay un cambio estructural en 1974: los parámetros de 1953-1973 son significativamente distintos a los de 1974-2004.



Limitaciones de la prueba de Chow

La prueba de Chow tiene algunas limitaciones importantes

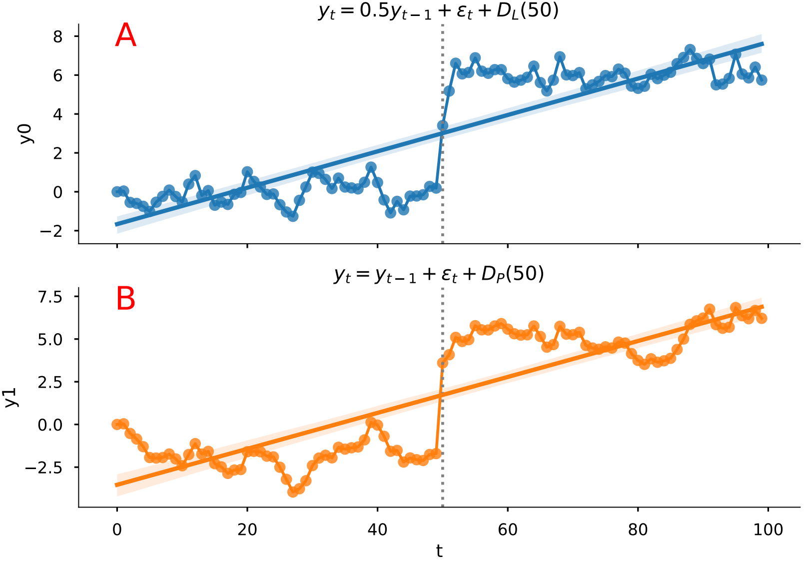
- Asume que el analista sabe la fecha en que ocurre el cambio estructural
- Asume que la varianza de los errores es la misma antes y después del cambio estructural.

3. Cambio estructural y raíces unitarias: fecha conocida

Cambio estructural y raíces unitarias

- Cuando se realizan pruebas de raíz unitaria, debe tenerse cuidado si se sospecha que ha ocurrido un cambio estructural.
- Cuando hay cambios estructurales, los estadísticos Dickey-Fuller están sesgados hacia no rechazar la hipótesis de que hay raíz unitaria.

Ejemplos de cambios estructurales



- Los datos de la figura A fueron generados por

$$
\begin{aligned}
y_t &= 0.5 y_{t-1} + \epsilon_t + 3 D_L(50)_t && \text{(AR(1) + cambio } \mu\text{)} \\
D_L(50)_t &= \mathrm{I}(t \geq 50) && \text{(dummy de nivel)}
\end{aligned}
$$

- La serie simulada parece tener una tendencia lineal.
- La manera apropiada de estimar este modelo es

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \delta D_L(50) + \epsilon_t$$

pero si estimamos

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \epsilon_t$$

el coeficiente α_1 tendería a ser positivo para capturar el salto en la serie.

- Suponga que por equivocación estimamos

$$y_t - y_{t-1} = c + \gamma y_{t-1} + \epsilon_t$$

lo que sería una caminata aleatoria con deriva si $\gamma = 0$. Entonces:

$$y_t = y_0 + ct + \sum_{i=i}^{t} \epsilon_i$$

- Esta ecuación describe los datos de manera similar a como lo hace $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \epsilon_t$, lo cual nos dice que la regresión Dickey-Fuller sesgaría los resultados hacia $\gamma = 0$, es decir, hacia no rechazar la presencia de una raíz unitaria.
- Perron (1989) demostró este sesgo con simulaciones de Monte Carlo.

- Ahora bien, una serie con raíz unitaria también puede presentar un cambio estructural, como en la figura B, generada por

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + \epsilon_t + 5D_P(50)_t && \text{(RW + cambio } \mu\text{)} \\ D_P(50)_t &= \mathrm{I}(t = 50) && \text{(dummy de impulso)} \end{aligned}$$

- Note que $D_P(t)$ es igual a 1 solo en el período t: cualquier cambio aditivo a una caminata aleatoria tiene un efecto permanente sobre el nivel de la serie.
- La serie simulada parece tener una tendencia lineal.
- De hecho, no es sencillo distinguirla de la figura A a simple vista.

- ¿Cómo saber entonces si una serie con cambio estructural tiene raíz unitaria?
- Una opción, similar a lo que hace la prueba de Chow, es partir la muestra de datos en dos partes, y realizar pruebas de raíz unitaria en cada una por separado
- Lo malo de este procedimiento es que pierde muchos grados de libertad.
- Sería preferible tener un test que utilice toda la muestra

¿Caminata aleatoria o serie estacionaria alrededor de tendencia?

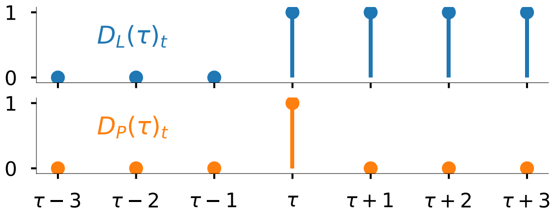
- Perron (1989) desarrolla un procedimiento formal para detectar raíces unitarias en presencia de un cambio estructural ocurrido en $t = \tau$.
- Las hipótesis nula y alternativa son

$$y_t = \alpha_0 + y_{t-1} + \mu_1 D_t^P(\tau) + \epsilon_t \qquad \text{(nula)}$$
$$y_t = \alpha_0 + \alpha_2 t + \mu_2 D_t^L(\tau) + \epsilon_t \qquad \text{(alternativa)}$$

- Es decir, la hipótesis nula es que hay un solo salto en una caminata aleatoria en el período τ, la alternativa es que en esa misma fecha hay un solo salto en el intercepto de una serie estacionaria alrededor de tendencia.

- Observemos que

$$\sum_{k=1}^{t} D_p(\tau)_k = D_L(\tau)_t$$



- Integrando la hipótesis nula

$$y_t = y_0 + \alpha_0 t + \mu_1 D_L(\tau)_t + \sum_{k=0}^{t} \epsilon_k$$

vemos que es equivalente a la alternativa excepto por las perturbaciones.

Modelo A: cambio de intercepto (crash)

$$y_t = \underbrace{\alpha_0 + \mu_1 D_t^P}_{\text{intercepto}} + y_{t-1} + \epsilon_t \qquad \text{(nula)}$$

$$y_t = \underbrace{\alpha_0 + \mu_2 D_t^L}_{\text{intercepto}} + \alpha_2 t + \epsilon_t \qquad \text{(alternativa)}$$

Modelo B: cambio de tendencia (changing growth)

$$y_t = \underbrace{\alpha_0 + \mu_2 D_t^L}_{\text{intercepto}} + y_{t-1} + \epsilon_t \qquad \text{(nula)}$$

$$y_t = \alpha_0 + \underbrace{\alpha_2 t + \mu_3 D_t^T}_{\text{tendencia}} + \epsilon_t \qquad \text{(alternativa)}$$

donde $D_t^T(\tau) = \max(t - \tau, 0)$

Modelo C: cambio de intercepto y de tendencia

$$y_t = \underbrace{\alpha_0 + \mu_1 D_t^P + \mu_2 D_t^L}_{\text{intercepto}} + y_{t-1} + \epsilon_t \qquad \text{(nula)}$$

$$y_t = \underbrace{\alpha_0 + \mu_2 D_t^L}_{\text{intercepto}} + \underbrace{\alpha_2 t + \mu_3 D_t^T}_{\text{tendencia}} + \epsilon_t \qquad \text{(alternativa)}$$

Para implementar la prueba de Perron se siguen 3 pasos:

Paso 1 Se estima la regresión correspondiente al modelo

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 t + \mu_1 D_t^P + \mu_2 D_t^L + \epsilon_t \tag{A}$$

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_2 t + \mu_3 D_t^T + \tilde{y}_t \qquad \Rightarrow \tilde{y}_t = \alpha_1 \tilde{y}_{t-1} + \epsilon_t \tag{B}$$

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 t + \mu_1 D_t^P + \mu_2 D_t^L + \mu_3 D_t^L + \epsilon_t \tag{C}$$

Paso 2 Si los residuos de la regresión están autocorrelacionados, se estima la regresión ampliada, agregando p rezagos del cambio en la variable:

$$\text{A y C}: \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-1} \qquad \text{B}: \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta \tilde{y}_{t-1}$$

Paso 3 Se calcula el estadístico t de la hipótesis $a_1 = 1$:

$$t_{\alpha_1} = \frac{\hat{\alpha_1} - 1}{s.e.(\alpha_1)}$$

y se compara con el valor crítico de Perron.

- Si el estadístico estimado es menor que el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula.
- El valor crítico depende de la proporción λ de observaciones que corresponden al periodo anterior al quiebre estructural.

Cuadro: Valores críticos de Perron

	Modelo A			Modelo B			Modelo C		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
λ									
0.1	-4.30	-3.68	-3.40	-4.27	-3.65	-3.36	-4.38	-3.75	-3.45
0.2	-4.39	-3.77	-3.47	-4.41	-3.80	-3.49	-4.65	-3.99	-3.66
0.3	-4.39	-3.76	-3.46	-4.51	-3.87	-3.58	-4.78	-4.17	-3.87
0.4	-4.34	-3.72	-3.44	-4.55	-3.94	-3.66	-4.81	-4.22	-3.95
0.5	-4.32	-3.76	-3.46	-4.56	-3.96	-3.68	-4.90	-4.24	-3.96
0.6	-4.45	-3.76	-3.47	-4.57	-3.95	-3.66	-4.88	-4.24	-3.95
0.7	-4.42	-3.80	-3.51	-4.51	-3.85	-3.57	-4.75	-4.18	-3.86
0.8	-4.33	-3.75	-3.46	-4.38	-3.82	-3.50	-4.70	-4.04	-3.69
0.9	-4.27	-3.69	-3.38	-4.26	-3.68	-3.35	-4.41	-3.80	-3.46

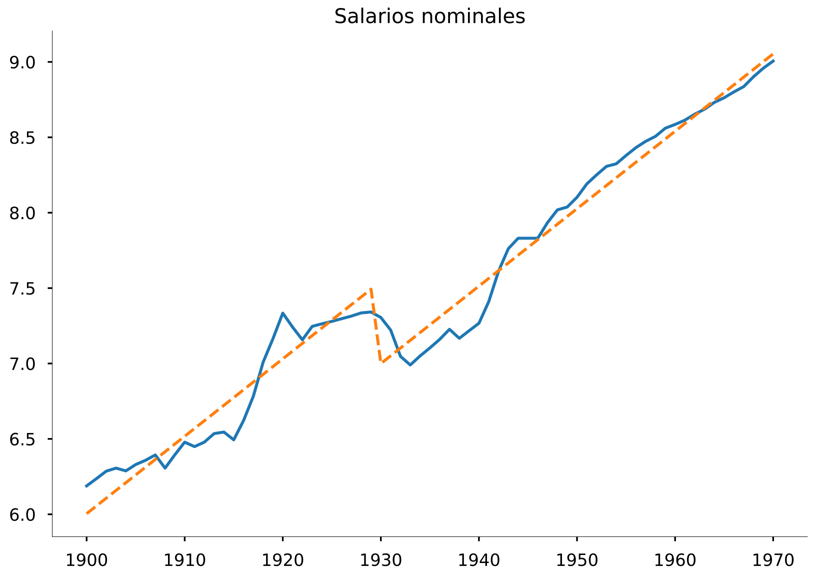
Fuente: Perron (1989)

Ejemplo 2:

Pruebas de cambio estructural

- NelsonPlosserData.dta
- Perron1989.py

Perron analiza los datos de Nelson y Plosser.



Al estimar el modelo A encuentran

	t	λ	1%	5%	10%
Real GNP	-5.03	0.34	-4.39	-3.76	-3.46
Nominal GNP	-5.42	0.34	-4.39	-3.76	-3.46
Real per capita GNP	-4.09	0.34	-4.39	-3.76	-3.46
Industrial production	-5.47	0.63	-4.45	-3.76	-3.47
Employment	-4.51	0.49	-4.32	-3.76	-3.46
GNP deflator	-4.04	0.50	-4.32	-3.76	-3.46
Consumer prices	-1.28	0.63	-4.45	-3.76	-3.47
Wages	-5.41	0.42	-4.34	-3.72	-3.44
Money stock	-4.29	0.50	-4.32	-3.76	-3.46

A continuación vemos cómo replicar los resultados del modelo A de Perron, escribiendo un programa de Python.

```python
import pandas as pd
import numpy as np
from statsmodels.formula.api import ols

NP = pd.read_stata('NelsonPlosserData.dta')
NP.set_index('year',inplace=True)
NP.index = NP.index.year
```

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 t + \mu_1 D_t^P + \mu_2 D_t^L + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

```python
def Perron_testA(serie, k=8):
    dta = NP[[serie]].dropna()
    dta.rename(columns={serie: 'y'}, inplace=True)
    dta['DL'] = (dta.index>1929)
    dta['DP'] = (dta.index==1930)
    dta['t'] = np.arange(dta.shape[0])
    dta['Ly'] = dta['y'].shift(1)
    dta['Dy'] = dta['y'].diff(1)
    for j in range(1, k+1):
        dta[f'D{j}y'] = dta['Dy'].shift(j)

    lags = '+'.join(dta.columns[-k:])

    modelo = ols('y ~ DL + DP + t + Ly +' + lags, dta).fit()
    tval = ((modelo.params - 1)/modelo.bse).round(2)['Ly']
    lda = 1-dta['DL'].mean()
    crit = perron['Modelo A'].loc[np.round(lda,1)]

    return {'$t$':tval, '$\lambda$':np.round(lda,2), '1\%':
        crit['1\%'],'5\%':crit['5\%'],'10\%':crit['10\%']}
```

4. Cambio estructural y raíces unitarias: fecha desconocida

¿Cómo saber cuándo se produjo un cambio estructural?

- Un supuesto importante en la prueba de Perron (1989) es que el analista conoce la fecha en que se produjo el (único) cambio estructural.
- No obstante, esto no siempre es factible.
- Zivot y Andrews (1992) proponen una prueba de raíz unitaria similar a la de Perron, pero que asume que el momento del cambio estructural es desconocido.

Una hipótesis nula, tres alternativas

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \epsilon_t \qquad \text{(nula)}$$

$$y_t = \underbrace{\alpha_0 + \mu_2 D_t^L}_{\text{intercepto}} + \alpha_2 t + \epsilon_t \qquad \text{(alternativa A)}$$

$$y_t = \alpha_0 + \underbrace{\alpha_2 t + \mu_3 D_t^T}_{\text{tendencia}} + \epsilon_t \qquad \text{(alternativa B)}$$

$$y_t = \underbrace{\alpha_0 + \mu_2 D_t^L}_{\text{intercepto}} + \underbrace{\alpha_2 t + \mu_3 D_t^T}_{\text{tendencia}} + \epsilon_t \qquad \text{(alternativa C)}$$

Para implementar la prueba de Zivot y Andrews se siguen estos pasos:

Paso 1 Se estima la regresión correspondiente al modelo

$$A: y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 t + \mu_2 D_t^L + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$B: y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 t + \mu_3 D_t^T + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$C: y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 t + \mu_2 D_t^L + \mu_3 D_t^T + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

donde los términos D_t^L y D_t^T dependen de la proporción de datos λ anteriores al cambio estructural:

$$D_t^L(\lambda) = I(t > \lambda T) \qquad D_t^T = \max(t - \lambda T, 0)$$

Paso 2 Se calcula el estadístico t de la hipótesis $a_1 = 1$:

$$t_{\alpha_1} = \frac{\hat{\alpha_1} - 1}{s.e.(\alpha_1)}$$

Observemos que el valor estimado $\hat{\alpha}$ dependerá de λ; por ello, escribimos $t_{\alpha_1}(\lambda)$

Paso 3 Se define el punte de quiebre $\hat{\lambda}$ como aquel valor λ que hace más plausible la hipótesis alternativa

$$\hat{\lambda} \equiv \underset{\lambda \in (0,1)}{\operatorname{argmin}} \{t_{\alpha_1}(\lambda)\}$$

Paso 4 Se compara el valor mínimo $t_{\alpha_1}(\hat{\lambda})$ con el valor crítico de Zivot y Andrews. Si el estadístico estimado es menor que el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula.

Cuadro: Valores críticos de Zivot y Andrews

Modelo	1%	5%	10%
A	-5.34	-4.80	-4.58
B	-4.93	-4.42	-4.11
C	-5.57	-5.08	-4.82

Fuente: Zivot y Andrews (1992)

Ejemplo 3:
Pruebas de cambio estructural (continuación)

- NelsonPlosserData.dta
- Perron1989.py

Zivot y Andrews (1992) también analizan los datos de Nelson y Plosser. Al estimar el modelo A encuentran

	$\hat{T}_B$	α_1	t
Real GNP	1929	0.267	-5.58
Nominal GNP	1929	0.532	-5.82
Real per capita GNP	1929	0.494	-4.61
Industrial production	1929	0.290	-5.95
Employment	1929	0.651	-4.95
GNP deflator	1929	0.786	-4.12
Consumer prices	1873	0.941	-2.76
Wages	1929	0.660	-5.30
Money stock	1929	0.823	-4.34

Recordemos los valores críticos

1%	5%	10%
-5.34	-4.80	-4.58

A continuación vemos cómo replicar los resultados del modelo A de Zivot y Andrews, escribiendo un programa de Python.

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 t + \mu_2 D_t^L + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

```python
def ZivotAndrewsA(serie, k=8):
    dta = NP[[serie]].dropna()
    dta.rename(columns={serie:'y'}, inplace=True)
    dta['t'] = np.arange(dta.shape[0])
    dta['Ly'] = dta['y'].shift(1)
    dta['Dy'] = dta['y'].diff(1)
    for j in range(1, k+1):
        dta[f'D{j}y'] = dta['Dy'].shift(j)

    lags = '+'.join(dta.columns[-k:])

    a1vals = pd.Series(0.0, index=dta.index[12:-12])
    for tau in a1vals.index:
        dta['DL'] = (dta.index>tau)
        reg = ols('y ~ Ly + t + DL + ' + lags, dta).fit()
        a1vals[tau] = ((reg.params - 1)/reg.bse)['Ly']

    tauhat, tval = a1vals.idxmin(), a1vals.min()
    dta['DL'] = (dta.index>tauhat)
    reg = ols('y ~ Ly + t + DL + ' + lags, dta).fit()

    return {r'$\hat{T}_B$':tauhat, r'$\alpha_1$': reg.
        params['Ly'], r'$t$':tval}
```

Referencias I

- Enders, Walter (2015). *Applied Econometric Time Series*. 4ª ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-80856-6.
- Greene, William H. (2012). *Econometric Analysis*. 7ª ed. Prentice Hall. ISBN: 978-0-13-139538-1.
- Levendis, John D. (2018). *Time Series Econometrics. Learning Through Replication*. Springer. ISBN: 978-3-319-98281-6.
- Perron, Pierre (nov. de 1989). "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis". En: *Econometrica* 57.6, pág. 13611401.
- Zivot, Eric y Donald W. K. Andrews (jul. de 1992). "Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis". En: *Journal of Business & Economic Statistics* 10.3, págs. 251-270.