



Estos apuntes fueron preparados para el curso

EC4301 - Macroeconometría

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

I Semestre 2020

Preliminar

Estos apuntes fueron actualizados por última vez el 8 de marzo de 2020. Estaré agregando material nuevo a este texto durante 2020. Una versión más reciente podría estar disponible en <http://randall-romero.com/ec4301-2020-i/>



Attribution-NonCommercial-ShareAlike
4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Índice general

I	Métodos para el análisis de una serie de tiempo individual	1
1	Introducción al análisis de series de tiempo	3
2	Ecuaciones en diferencia	25

Todavía está incompleto

Referencias propuestas para estos apuntes:

- Walter Enders (2014). *Applied Econometric Time Series*. 4^a ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-80856-6
- Gebhard Kirchgässner, Jürgen Wolters y Uwe Hassler (2013). *Introduction to Modern Time Series Analysis*. 2^a ed. Springer. ISBN: 978-3-642-33435-1
- George E. P. Box y col. (2016). *Time Series Analysis*. 5^a ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-67502-1
- Terence C. Mills (2019). *Applied Time Series Analysis. A Practical Guide to Modeling and Forecasting*. Academic Press. ISBN: 978-0-12-813117-6
- Gunnar Bardsen y col. (2005). *The Econometrics of Macroeconomic Modelling*
- Helmut Lütkepohl y Markus Kratzig, eds. (2004). *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-83919-8
- James M. Hamilton (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. ISBN: 0-691-04289-6

Copyright

This material is shared under a **Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)** Creative Commons license.

You are free to:

Share — copy and redistribute the material in any medium or format.

Adapt — remix, transform, and build upon the material.

Under the following terms:

Attribution — You must give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use.

NonCommercial — You may not use the material for commercial purposes.

ShareAlike — If you remix, transform, or build upon the material, you must distribute your contributions under the same license as the original.



**Attribution-NonCommercial-ShareAlike
4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)**

Parte I

Métodos para el análisis de una serie de tiempo individual

Capítulo 1

Introducción al análisis de series de tiempo

En este capítulo

1.1	Una breve historia	3
1.2	Representación gráfica de series de tiempo	6
1.3	El operador de rezagos	11
1.4	Procesos estocásticos	13
1.5	Series de tiempo	15

1.1 Una breve historia

¿Para qué estudiar series de tiempo

El análisis de series de tiempo ayuda a detectar *regularidades* en las observaciones de una variable y derivar “*leyes*” a partir de ellas, o bien para explotar toda la información incluida en la variable para *predecir* mejor el futuro.

- El análisis de series de tiempo ha tenido un papel importante en la ciencia desde la antigüedad.
 - Por ejemplo, los astrónomos babilonios usaron series de tiempo de las posiciones relativas de las estrellas y planetas para predecir eventos astronómicos.
 - Kepler descubrió las leyes que llevan su nombre a partir de observaciones de los movimientos de los planetas.

Inicios 1900s -> Evgenij E. Slutsky y George Udny Yule

- A inicios del siglo XX, Slutsky y Yule mostraron que series de tiempo con propiedades similares a series económicas pueden generarse como sumas o restas (simples o ponderadas) de procesos puramente aleatorios.
- Desarrollaron los procesos de media móvil y autorregresivos como modelos para representar series de tiempo.

1919 -> Warren M. Persons

- En 1919 Persons propuso la descomposición de una serie de tiempo en componentes no observables que dependen de causas distintas.
- Los componentes son:
 - un movimiento de largo plazo, la *tendencia*,
 - un componente cíclico con períodos de más de un año, el *ciclo económico*,
 - un componente que contiene los aumentos y disminuciones dentro del año, el ciclo *estacional*,
 - un componente que contiene todos los movimientos no atribuibles a los demás componentes, el residual o *componente irregular*.

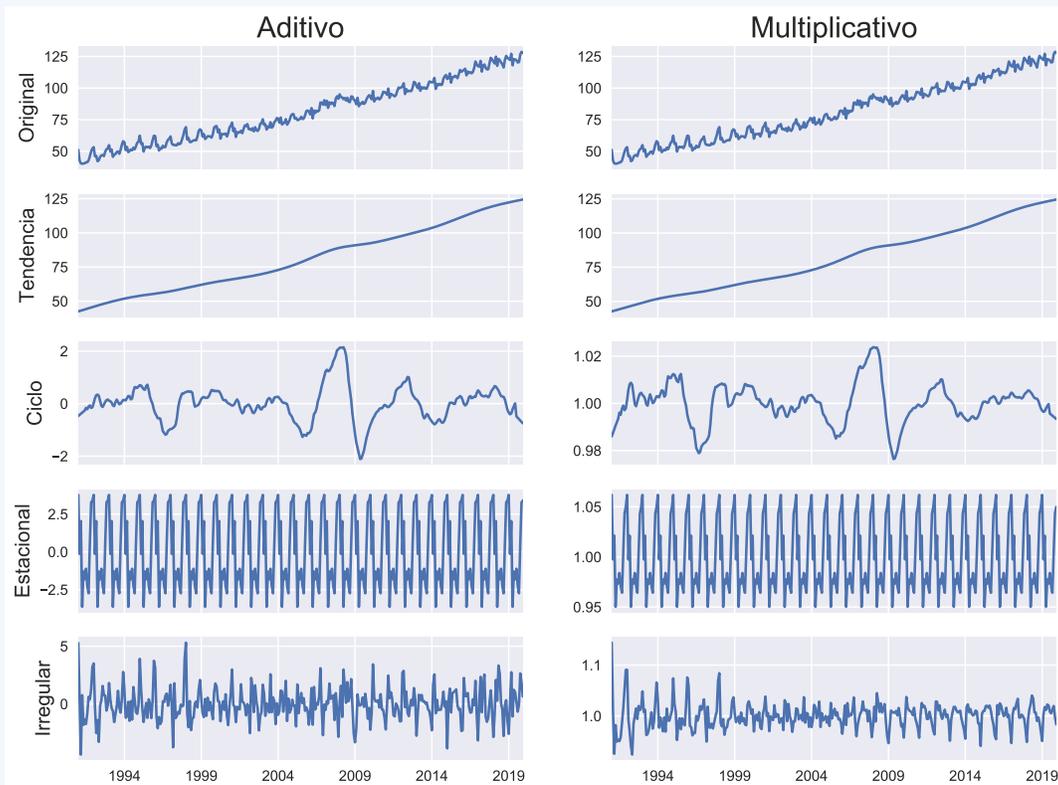
Aditiva

$$Y_t = T_t + C_t + S_t + I_t$$

Multiplicativa

$$Y_t = T_t \times C_t \times S_t \times I_t$$

Ejemplo 1-1: Componentes del IMAE



Esta es una descomposición "ingenua". Más adelante en el curso estudiaremos métodos más sofisticados.

Enfoques clásico vs moderno de descomposición de series

- Como los componentes *no son observables*, es necesario hacer supuestos acerca de su naturaleza para estudiar el proceso generador de la serie.

Enfoque clásico	Enfoque moderno
$Y_t = \underbrace{T_t + C_t + S_t}_{\text{determinísticos}} + \underbrace{I_t}_{\text{estocástico}}$	$Y_t = \underbrace{T_t + C_t + S_t + I_t}_{\text{estocásticos}}$
<p>Los componentes sistemáticos son funciones <i>determinísticas</i> del tiempo, el componente residual es estocástico pero <i>no contiene movimientos sistemáticos</i>.</p>	<p>La “ley de movimiento” de la serie es vista como un <i>proceso estocástico</i>, y los datos de la serie como <i>una realización</i> del proceso generador de datos.</p>

1930s -> Jan Tinbergen

- En 1936, Tinbergen construyó el primer modelo econométrico: un modelo macroeconómico de la economía holandesa, empezando así el desarrollo de la econometría aplicada.
- En 1939, presentó su metodología para el análisis estadístico de teorías de ciclo económico, así como un modelo macroeconómico de Estados Unidos.
- Sus métodos fueron controversiales:

“Nadie podría ser más franco, más meticuloso, más libre de prejuicios subjetivos o partidistas que el profesor Tinbergen. No hay nadie, por lo tanto, en lo que respecta a las cualidades humanas, a quien sería más seguro confiar con magia negra. Todavía no estoy convencido de que haya alguien en quien confiaría en la etapa actual o que esta marca de alquimia estadística está madura para convertirse en una rama de la ciencia. Pero Newton, Boyle y Locke jugaron con la alquimia. Así que déjenle continuar.”

Keynes, 1940

Citado por Boumans (2015)

1938 -> Herman Wold

- Wold sistematizó y generalizó el trabajo de Slutsky y Yule.
- Demostró que para proceso covarianza-estacionario, puramente no-determinístico, existe una descomposición de la serie como combinación lineal de una serie de variables aleatorias no correlacionadas con media cero y varianza constante.

1949 -> Donald Cochrane y Guy H. Orcutt

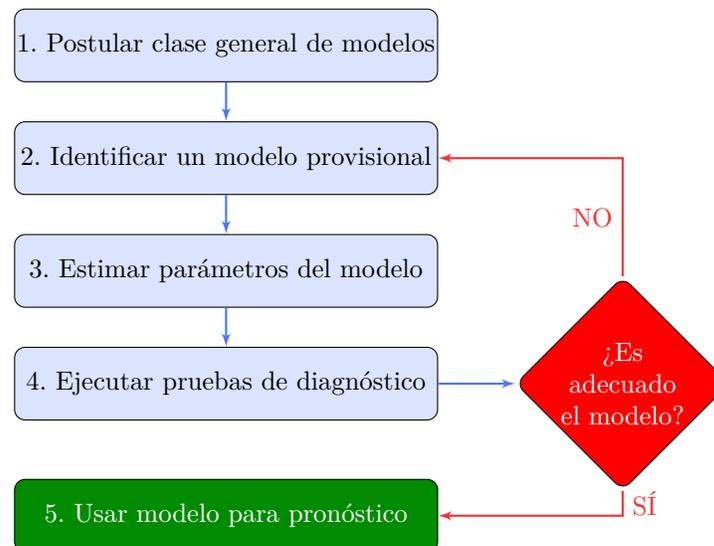
- Tinbergen utilizó los supuestos del modelo clásico de regresión lineal, sin prestar atención a la dependencia cronológica de los residuos.
- En 1949 Cochrane y Orcutt notaron que esta práctica era problemática.
- Demostraron que si los residuos de una regresión están positivamente correlacionados, entonces la varianza de los parámetros de regresión está subestimada y los estadísticos t y F sobrestimados.
- El problema se podía resolver transformando los datos adecuadamente.

1950 -> James Durbin y Geoffrey S. Watson

- En 1950/51 Durbin y Watson desarrollaron un test para identificar autocorrelación de primer orden en los residuos.

1970 -> George E.P. Box y Gwilym M. Jenkins

- En 1970 Box y Jenkins publican un libro de texto de análisis de series de tiempo.
- Introducen modelos univariados para series de tiempo, que usan sistemáticamente la información contenida en los valores de la serie.
- Manera sencilla de producir pronósticos.
- Hoy en día conocida como *metodología Box-Jenkins*.

La metodología Box-Jenkins**1975 -> Clive W.J. Granger y Paul Newbold**

- En 1975 Granger y Newbold mostraron que los pronósticos sencillos de métodos univariados a menudo eran mejores que los pronósticos basados en modelos econométricos grandes (cientos de ecuaciones).
- Esto impulsó la enorme popularidad de la metodología Box-Jenkins.

1.2 Representación gráfica de series de tiempo**Nivel de la serie**

- Antes de modelar una serie de tiempo, es útil representarla con un gráfico para detectar algunas de sus propiedades.
- En este caso: el PIB
 - muestra una tendencia positiva

- tiene variaciones estacionarias
- En lo que sigue, nos referimos a esta serie en nivel como y_t .

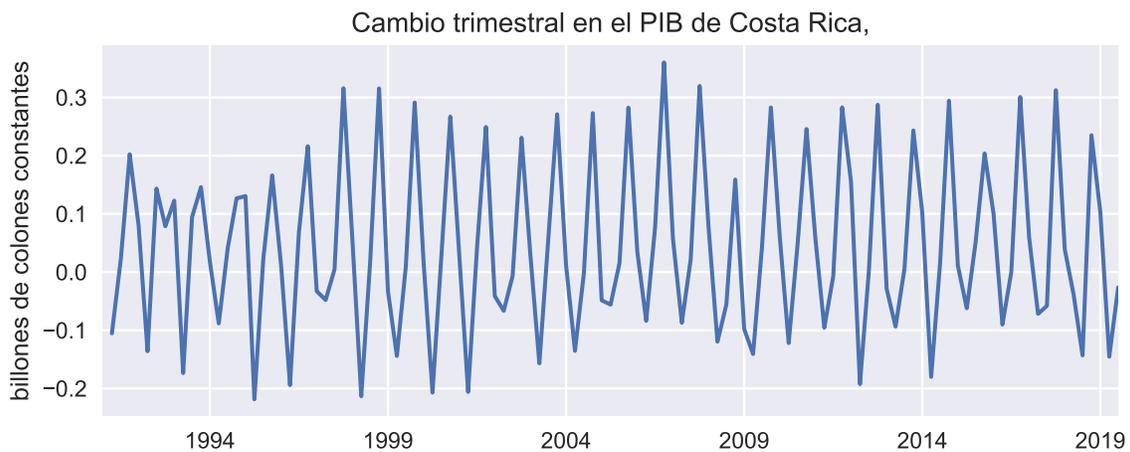


Primera diferencia de la serie

$$\Delta y_t \equiv y_t - y_{t-1}$$

Esta transformación

- elimina la tendencia de la serie,
- mantiene las oscilaciones estacionales.

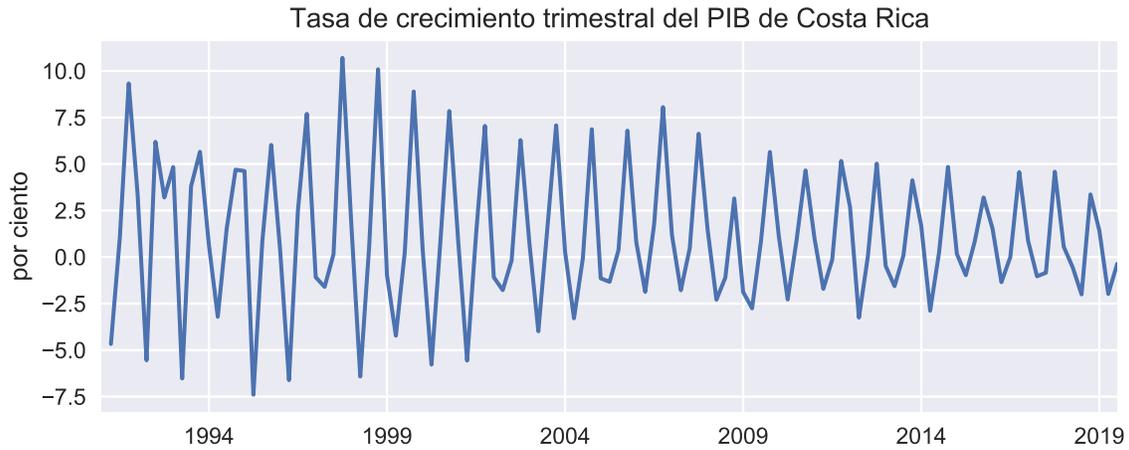


Tasa de crecimiento de la serie

$$\Delta\%y_t \equiv \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \times 100$$

- Elimina tendencia, mantiene estacionalidad.

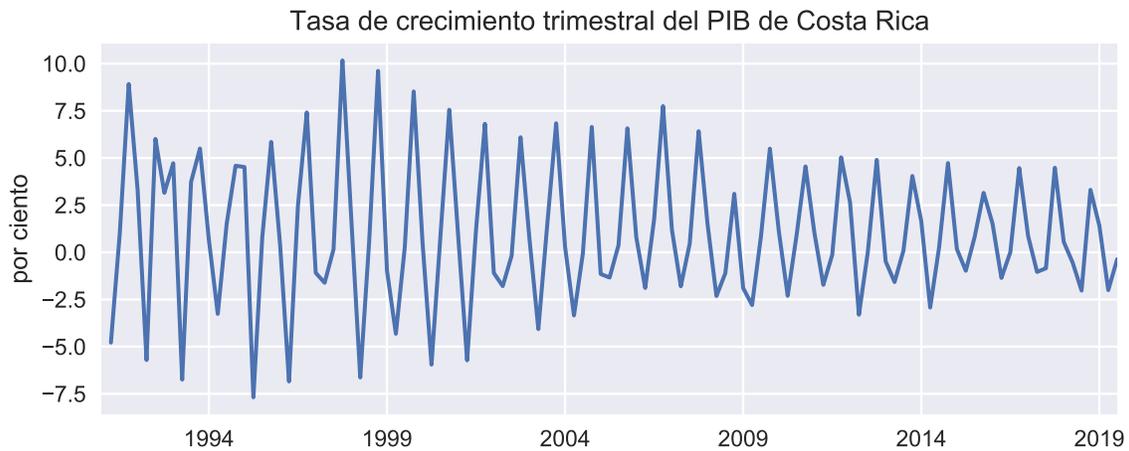
- Limitación: asimetría con respecto a cambios positivos y negativos: Subir de 100 a 125 (aumento de 25%), bajar de 125 a 100 (caída de “solo” 20%).



Tasa “continua” de crecimiento de la serie

$$\Delta\%y_t \approx (\ln y_t - \ln y_{t-1}) \times 100$$

- Similar a la anterior porque $\ln(1 + x) \approx x$ si x es “pequeño”
- Ventaja: simetría con respecto a cambios positivos y negativos



Diferencia interanual de la serie

$$\Delta_4 y_t \equiv y_t - y_{t-4}$$

- Elimina tanto la tendencia como el componente estacional
- Nótese la fuerte disminución del PIB durante la crisis de 2008.

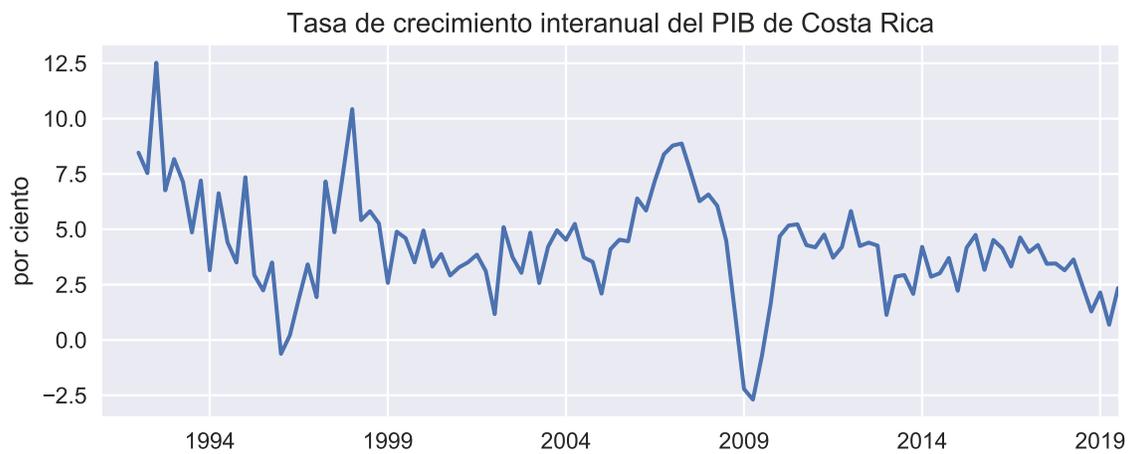


Tasa de crecimiento interanual

$$\Delta_4\%y_t \approx (\ln y_t - \ln y_{t-4}) \times 100$$

- Equivalente a la suma de las tasas de crecimiento de los cuatro trimestres comprendidos en el año:

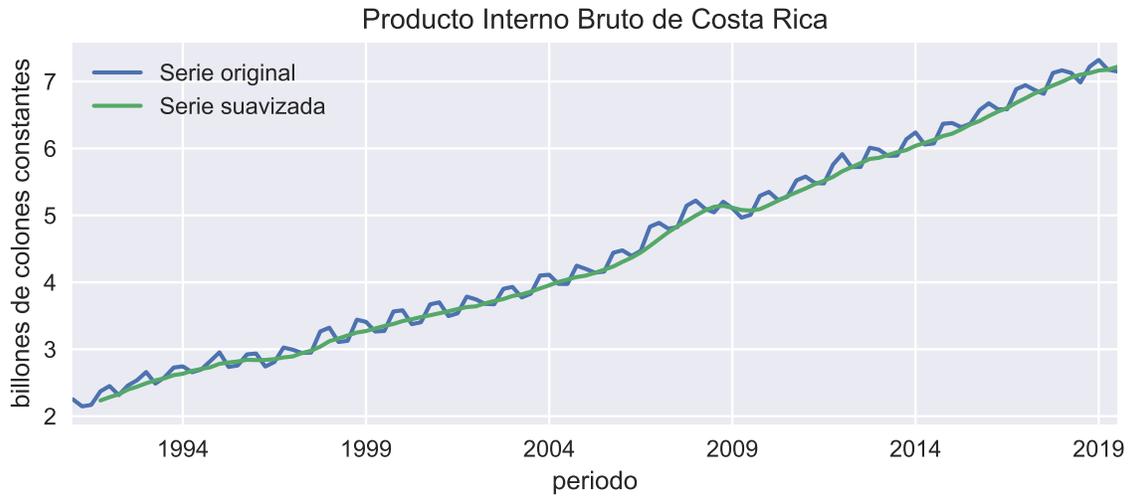
$$\begin{aligned} \Delta_4\%y_t &\approx (\ln y_t - \ln y_{t-4}) \times 100 \\ &= (\ln y_t - \ln y_{t-1} + \ln y_{t-1} - \ln y_{t-2} + \ln y_{t-2} - \ln y_{t-3} + \ln y_{t-3} - \ln y_{t-4}) \times 100 \\ &= \Delta\%y_t + \Delta\%y_{t-1} + \Delta\%y_{t-2} + \Delta\%y_{t-3} \end{aligned}$$



Serie suavizada por media móvil

$$y_t^s \equiv \frac{1}{4} (y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3})$$

- Elimina el componente estacional, pero manteniendo la tendencia
- Se observa un cambio estructural en 2008-2009.



Ejemplo 1-2: Transformación de datos

 data/CR-PIB.csv

 Transforme.do

 Transforme.ipynb

 Transforme.prg

 Transforme.R

Las transformaciones ilustradas en las figuras pueden ser calculadas con Stata y con Python:

	Stata	Python
Serie original	pib	pib
Primera diferencia	D.pib	pib.diff()
Tasa de crecimiento	D.pib / L.pib	pib.pct_change(1)
Tasa de variación continua	gen l=log(pib) D.lpib	np.log(pib).diff()
Diferencia interanual	S4.pib	pib.diff(4)
Tasa de crecimiento interanual	S4.lpib	np.log(pib).diff(4)
Suavizada por media móvil	tssmooth ma y = pib, window(3 1 0)	pib.rolling(4).mean()

1.3 El operador de rezagos

Definición de operador de series de tiempo

- Un operador de serie de tiempo es un “proceso” que transforma una o más series de tiempo en nuevas series de tiempo.
- Ejemplos:
 - Multiplicación escalar: $y_t = \beta x_t$
 - Suma: $y_t = x_t + w_t$
 - Identidad: $y_t = 1y_t$
- Nótese que:

$$y_t = \beta(x_t + w_t) = \beta x_t + \beta w_t$$

Operador de rezago

- El operador de rezago se denota por L y se define como:

$$L x_t \equiv x_{t-1}$$

- En general, se tiene que:

$$L^k x_t = x_{t-k}$$

Ejemplo 1-3: Operador de rezagos y transformación de series

Algunas de las transformaciones de la serie y_t de la sección anterior pueden expresarse con el operador de rezagos:

Serie original	y_t
Primera diferencia	$\Delta y_t \equiv y_t - y_{t-1} = y_t - L y_t = (1 - L)y_t$
Tasa de crecimiento	$\Delta\% y_t \approx 100 (\ln y_t - \ln y_{t-1}) = 100(1 - L) \ln y_t$
Diferencia interanual	$\Delta_4 y_t \equiv y_t - y_{t-4} = y_t - L^4 y_t = (1 - L^4)y_t$
Tasa de crecimiento interanual	$\Delta_4\% y_t \approx 100 (\ln y_t - \ln y_{t-4}) = 100(1 - L^4) \ln y_t$
Suavizada por media móvil	$y_t^s \equiv \frac{1}{4} (y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3}) = \frac{1}{4} (1 + L + L^2 + L^3) y_t$

Ejemplo 1-4: Operador de rezagos

data/LandD.csv

LandD.do

LandD.ipynb

landd.prg

LandD.R

t	y_t	$L y_t$	$L^2 y_t$	Δy_t	$\Delta^2 y_t$	$\Delta_4 y_t$
2018Q1	10
2018Q2	13	10	.	3	.	.
2018Q3	10	13	10	-3	-6	.
2018Q4	8	10	13	-2	1	.
2019Q1	15	8	10	7	9	5
2019Q2	16	15	8	1	-6	3
2019Q3	14	16	15	-2	-3	4
2019Q4	11	14	16	-3	-1	3

Propiedades del operador de rezago

Sean x_t, w_t dos series de tiempo. Entonces:

- $L(\beta x_t) = \beta L x_t$
- $L(x_t + w_t) = L x_t + L w_t$
- $L(c) = c$
- $L^{-h} x_t = x_{t+h}$
- $L^0 x_t = x_t$
- $(\alpha L^h + \beta L^k)x_t = \alpha x_{t-h} + \beta x_{t-k}$

donde α, β, c son constantes.

Polinomio de rezagos

- El operador de rezagos sigue las reglas usuales de operaciones algebraicas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (a + bL)(c + dL)x_t &= (a + bL)(cx_t + dx_{t-1}) \\ &= acx_t + adx_{t-1} + bcx_{t-1} + bdx_{t-2} \\ &= [ac + (ad + bc)L + bdL^2] x_t \end{aligned}$$

- Así, definimos un polinomio de rezagos de orden p :

$$(1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \dots + \phi_p L^p) x_t = x_t + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p}$$

Inverso de un polinomio de rezagos de grado 1

- Considere la operación

$$\begin{aligned}(1 - \phi L) \left(1 + \phi L + \dots + \phi^k L^k \right) x_t &= \left(1 - \phi^{k+1} L^{k+1} \right) x_t \\ &= x_t - \phi^{k+1} x_{t-k-1}\end{aligned}$$

- Si $|\phi| < 1$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi^{k+1} x_{t-k-1} = 0$$

- con lo que

$$(1 - \phi L) \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots \right) x_t = x_t$$

- En este caso, escribimos

$$(1 - \phi L)^{-1} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots$$

Inverso de un polinomio de rezagos de grado p

- Consideremos el polinomio

$$\Phi(L) \equiv 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

- Si factorizamos el polinomio como

$$\Phi(L) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \cdots (1 - \lambda_p L)$$

- Encontramos su inverso como

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(L) &= (1 - \lambda_1 L)^{-1} \cdots (1 - \lambda_p L)^{-1} \\ &= (1 + \lambda_1 L + \lambda_1^2 L^2 + \dots) \cdots (1 + \lambda_p L + \lambda_p^2 L^2 + \dots)\end{aligned}$$

1.4 Procesos estocásticos

Procesos estocásticos

- Un *proceso estocástico* es una secuencia temporal de variables aleatorias $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$.
- Dos tipos de procesos:

Continuos si sus realizaciones son tomadas de un intervalo de la recta real $Y_t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Discretos si hay solamente un número contable de realizaciones $Y_t \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

- También llamado *proceso generador de datos*.

Procesos estocásticos i.i.d.

- Los elementos de un proceso estocástico son *idéntica e independientemente distribuidos* (abreviado “*iid*”), si la distribución de probabilidad es la misma para cada miembro del proceso Z_t e independiente de las realizaciones de otros miembros del proceso.
- En este caso, para la muestra $\{Y_t\}_{t=1}^T$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_T = y_T] &= \\ &= \mathbb{P}(Y_1 = y_1) \times \mathbb{P}(Y_2 = y_2) \times \dots \times \mathbb{P}(Y_T = y_T)\end{aligned}$$

Momentos incondicionales

- Función de distribución acumulada incondicional

$$F_{Y_t}(y) = \mathbb{P}[Y_t \leq y]$$

- Esperanza (media) incondicional

$$\mu_t \equiv \mathbb{E}(Y_t) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, dF_{Y_t}(y)$$

- Varianza incondicional

$$\gamma_{0t} \equiv \mathbb{E}(Y_t - \mu_t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_t)^2 \, dF_{Y_t}(y)$$

- Autocovarianza

$$\gamma_{jt} \equiv \mathbb{E}(Y_t - \mu_t)(Y_{t-j} - \mu_{t-j})$$

Estacionariedad

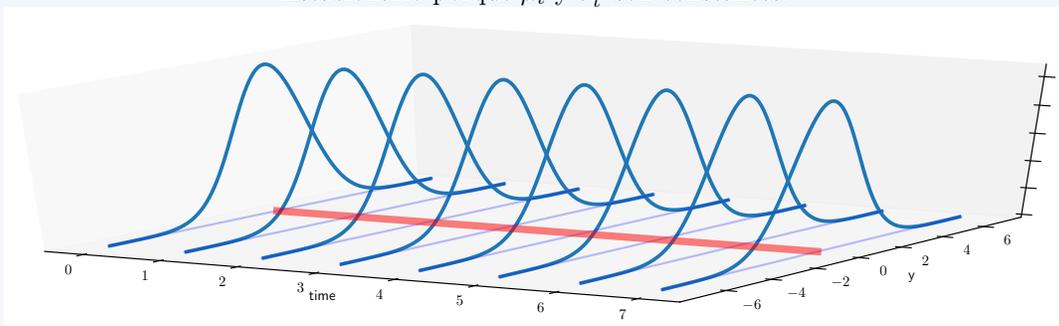
Si la media μ_t ni las autocovarianzas γ_{jt} dependen de la fecha t , entonces decimos que el proceso Y_t es *covarianza-estacionario* o *débilmente estacionario*:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= \mu && \text{para todo } t \\ \mathbb{E}(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu) &= \gamma_j && \text{para todo } t \text{ y cualquier } j \end{aligned}$$

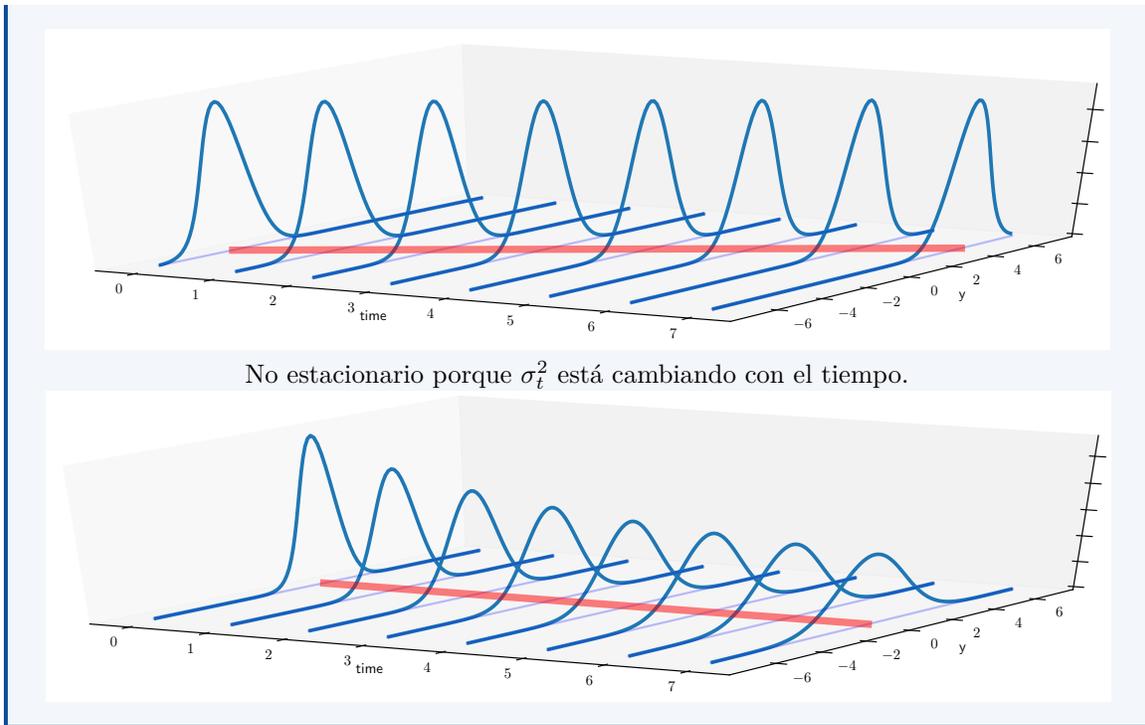
Ejemplo 1-5: Procesos estacionarios y no estacionarios

Supongamos que Y_t es un proceso estocástico tal que $Y_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$

Estacionario porque μ_t y σ_t^2 son constantes.



No estacionario porque μ_t está cambiando con el tiempo.



Ruido blanco

- El bloque básico para construir los procesos considerados en este curso es una secuencia $\{\epsilon_t\}$ cuyos elementos tienen media cero y varianza σ^2 ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_t) &= 0 && \text{(media cero)} \\ \mathbb{E}(\epsilon_t^2) &= \sigma^2 && \text{(varianza constante)} \\ \mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_\tau) &= 0 \text{ for } t \neq \tau && \text{(términos no correlacionados)} \end{aligned}$$

- Si los términos están normalmente distribuidos

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

entonces tenemos el *proceso ruido blanco gaussiano*.

1.5 Series de tiempo

Definición de serie de tiempo

- Una serie de tiempo es una colección de observaciones indexadas por la fecha de cada observación, denotada por y_t

$$\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$$

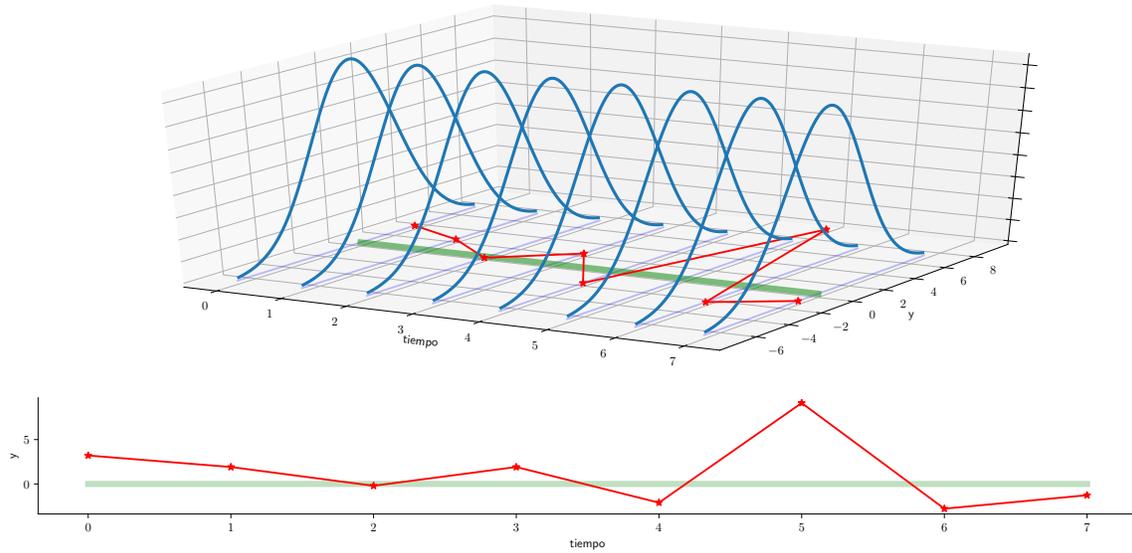
- En la práctica se asume que lo anterior es sólo una muestra, pero que la serie pudo haber sido observada en más períodos.

$$\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = \{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots, y_T, y_{T+1}, y_{T+2}, \dots\}$$

- Así, vemos a una serie de tiempo como *una realización* del proceso estocástico $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, de la cual solo tenemos observaciones para t entre 1 y T .

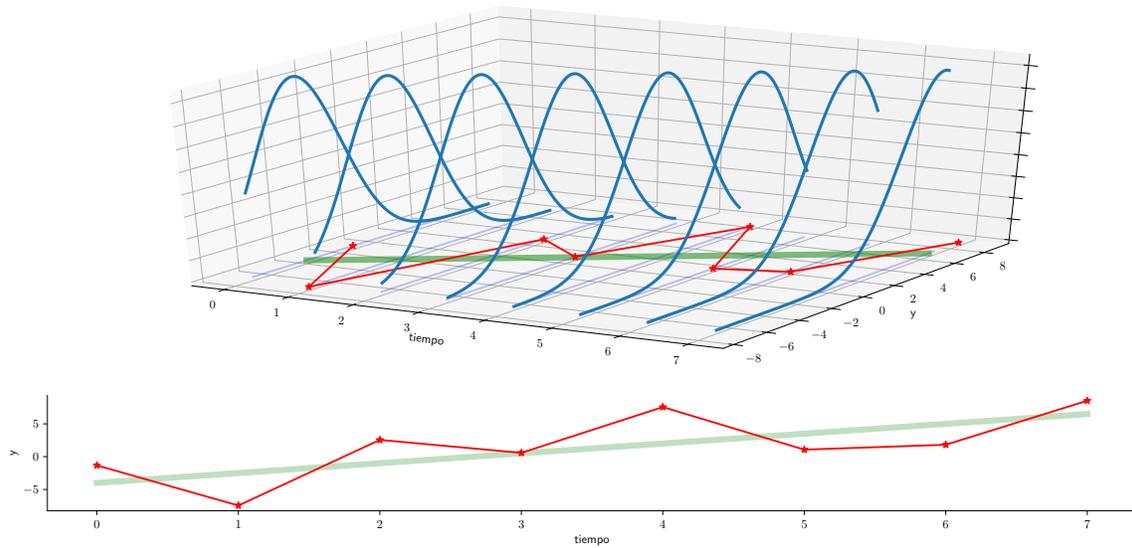
Serie de tiempo estacionaria

Una serie de tiempo estacionaria es una realización de un proceso estocástico estacionario.



Serie de tiempo no estacionaria

Una serie de tiempo no estacionaria es una realización de un proceso estocástico no estacionario.



Casos particulares de series de tiempo

- Tendencia:

$$y_t = t$$

- Constante:

$$y_t = c$$

- Proceso ruido blanco de Gauss:

$$y_t = \epsilon_t, \text{ con } \{\epsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty} \text{ i.i.d., } \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Nota: Ley de los grandes números

La ley débil de los grandes números establece que si X_1, X_2, X_3, \dots es una sucesión infinita de variables aleatorias *independientes* que tienen el mismo valor esperado μ y varianza σ^2 , entonces el promedio

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

converge en probabilidad a μ . En otras palabras, para cualquier número positivo ϵ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) = 1.$$

Prueba (muy) informal: Note que:

- $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$
- $\text{Var}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Infiriendo los momentos del proceso estocástico

- Suponga que tenemos un número grande n de realizaciones independientes del proceso estocástico $\{Y_t\}_{t=1}^T$, y que deseamos estimar el valor del momento no central $\mu'_{k,t} \equiv \mathbb{E}[Y_t^k]$.
- Utilizando la ley de los grandes números, podemos estimarlo así

$$\hat{\mu}'_{k,t} = \frac{y_{t,1}^k + y_{t,2}^k + \dots + y_{t,n}^k}{n}$$

- En la práctica, sólo tenemos una única realización del proceso: y_1, y_2, \dots, y_T .
- ¿Podemos estimar $\mu'_{k,t}$ a partir de $\bar{y}^k = \frac{y_1^k + y_2^k + \dots + y_T^k}{T}$?
- En general no, a menos que el proceso estocástico sea
 1. estacionario
 2. ergódico (para el momento k).

Ergodicidad

En el caso de procesos estacionarios, el supuesto de *ergodicidad* significa que momentos muestrales calculados a partir de una serie de tiempo con un número finito de observaciones converge (en algún sentido) a sus contrapartes poblacionales.

Ergódico en media

El proceso es ergódico en media si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t - \mu \right)^2 \right] = 0$$

Ergódico en varianza

El proceso es ergódico en varianza si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \mu)^2 - \sigma_y^2 \right)^2 \right] = 0$$

Algunas apuntes acerca de la ergodicidad

- Las condiciones de ergodicidad son “propiedades de consistencia” para variables aleatorias dependientes, y no pueden ser evaluadas. Por ello, deben ser asumidas.
- No podemos usar la ley de los grandes números para probar ergodicidad, porque las distribuciones de distintos momentos t pueden ser idénticas, pero en general no son independientes.
- Un proceso no estacionario no puede ser ergódico: ¿a los momentos de cuál variable Y_t convergerían los momentos muestrales si los poblacionales no fueran constantes?

Estimación de momentos de un proceso estacionario

- Si el proceso es ergódico, podemos estimar consistentemente:

Media

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

Varianza

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu})^2$$

Autocovarianza

$$\hat{\gamma}_\tau = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} (y_t - \hat{\mu})(y_{t+\tau} - \hat{\mu})$$

Autocorrelación

$$\hat{\rho}_\tau = \frac{\hat{\gamma}_\tau}{\hat{\gamma}_0}$$

para $\tau = 1, 2, \dots, T - 1$.

Asimetría

$$\hat{S} = \frac{1}{T} \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu})^3}{\sqrt{\hat{\gamma}_0^3}}$$

Kurtosis

$$\hat{K} = \frac{1}{T} \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu})^4}{\hat{\gamma}_0^2}$$

Autocorrelación

- Es imposible evaluar qué tan fuerte es la dependencia de variables de un proceso estocástico a partir de las autocovarianzas, porque éstas dependen de las unidades de medida de la serie.
- Por ello, utilizamos las *autocorrelaciones*, que se obtienen de dividir las autocovarianzas por la varianza del proceso.
- Si el proceso es estacionario se cumple que:
 - $\rho_0 = 1$
 - $\rho_\tau = \rho_{-\tau}$
 - $|\rho_\tau| \leq 1$ para todo τ .
- Llamamos *autocorrelograma* a la secuencia de autocorrelaciones ρ_τ , vista como función del número de rezagos τ .

Autocorrelación muestral

- En la práctica, a partir de una muestra estimaremos la *autocorrelación muestral*.
- Como nuestra muestra es finita, los valores estimados no necesariamente coincidirán con los poblacionales.
- Por ello, nos interesa especialmente saber cuándo estas autocorrelaciones son significativamente distintas de cero.
- Según Bartlett (1946), la varianza de los coeficientes de autocorrelación en los cuales $\rho_{k+1}, \rho_{k+2}, \dots = 0$ está dada por

$$V[\hat{\rho}(\tau)] \approx \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^k \rho(j)^2 \right)$$

Autocorrelación parcial

- La m -ésima autocorrelación parcial $\hat{a}_m^{(m)}$ se estima por OLS como el último coeficiente de una regresión de y en una constante y sus m valores más recientes:

$$y_t = c + \hat{a}_1^{(m)} y_{t-1} + \hat{a}_2^{(m)} y_{t-2} + \dots + \hat{a}_m^{(m)} y_{t-m} + \epsilon_{t+1}$$

- La idea es medir el efecto *directo* de, por ejemplo, y_{t-1} sobre y_{t+1} , controlando por el efecto indirecto que y_{t-1} pueda tener sobre y_{t+1} a través de y_t .
- Si los datos están generados por un proceso AR(p), entonces el estimador $\hat{a}_m^{(m)}$ tiene una varianza alrededor del verdadero valor (cero) aproximada por

$$\text{Var} \left[\hat{a}_m^{(m)} \right] \approx \frac{1}{T} \quad \text{para } m = p + 1, p + 2, \dots$$

Ejemplo 1-6: Autocorrelograma del IMAE

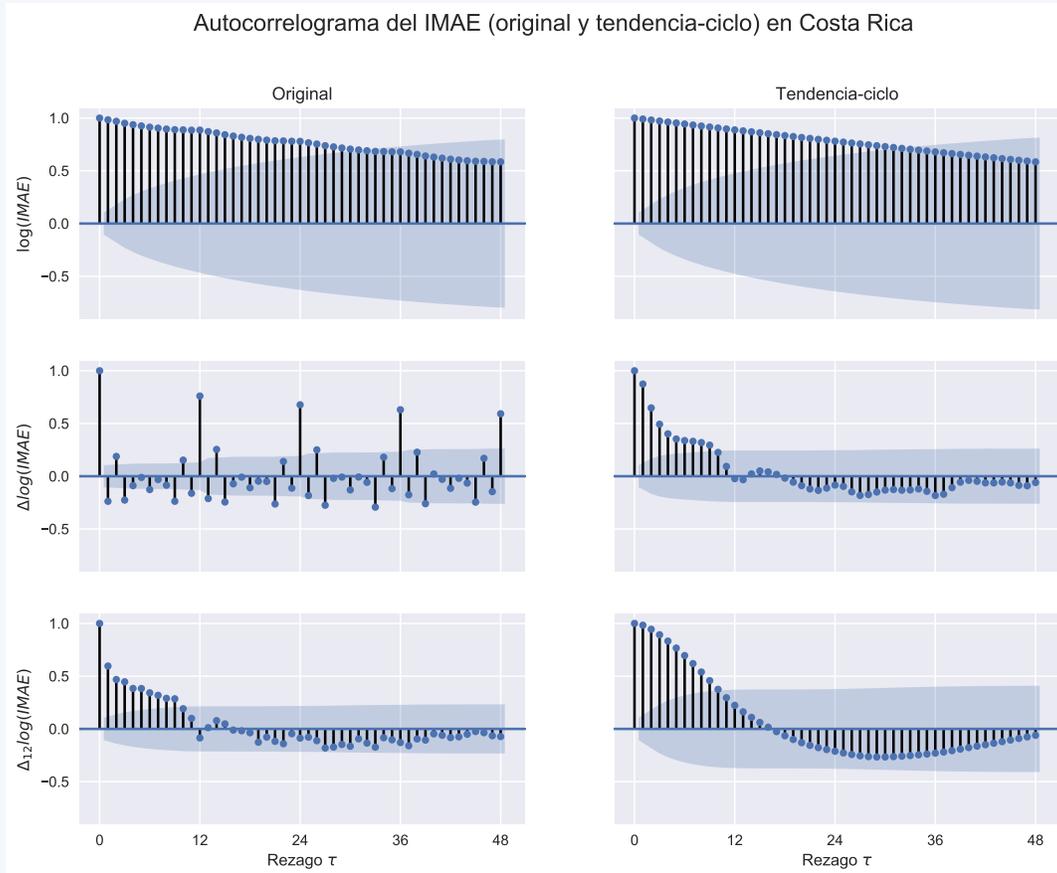
log_imaecsv

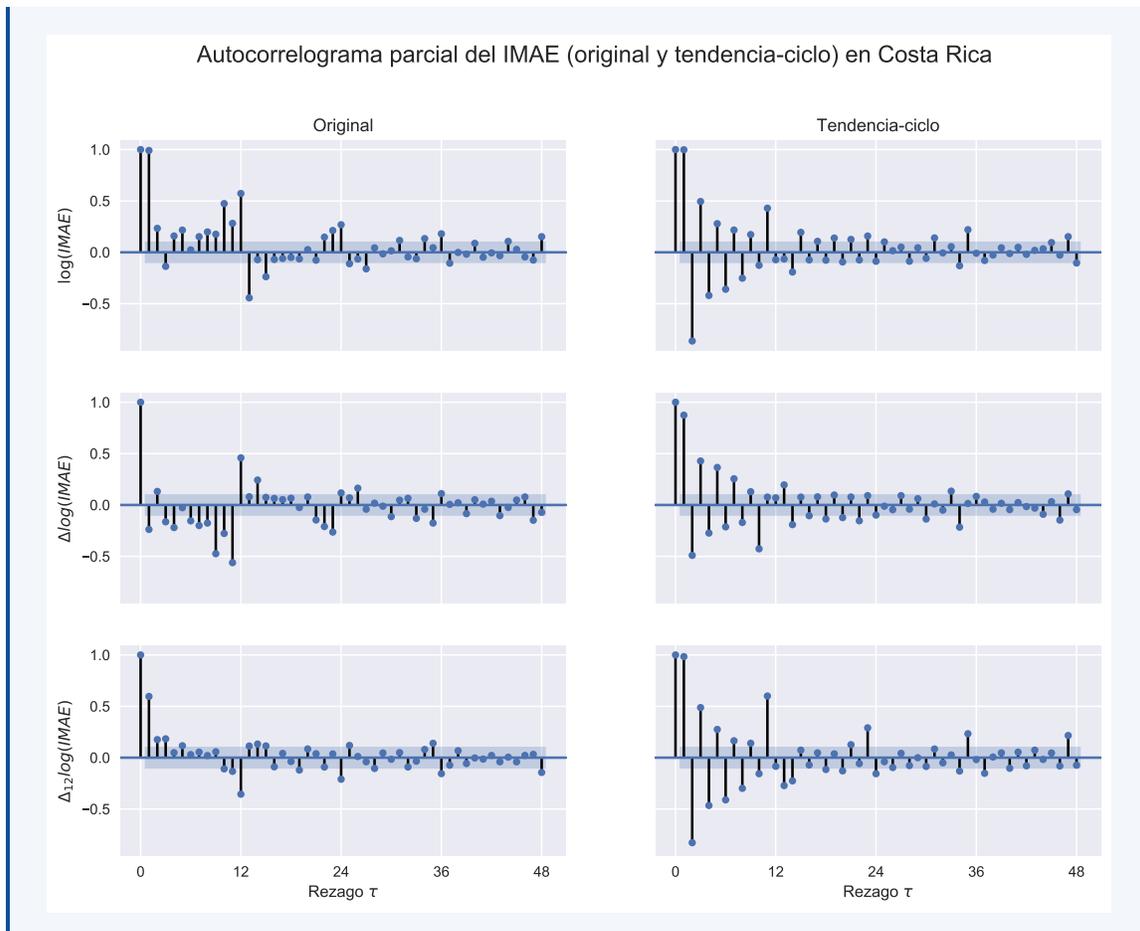
correlogram.ipynb

correlogram.do

correlogram.prg

correlogram.R





Determinando si una serie de tiempo es ruido blanco

- Cuando se estiman modelos de series de tiempo, es importante evaluar si los residuos de la estimación corresponden a una realización de un proceso de ruido blanco.
- Recordando que un proceso ruido blanco $\{\epsilon_t\}$ es tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_t) &= 0 && \text{(media cero)} \\ \mathbb{E}(\epsilon_t^2) &= \sigma^2 && \text{(varianza constante)} \\ \mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_\tau) &= 0 \text{ for } t \neq \tau && \text{(términos no correlacionados)} \end{aligned}$$

una forma natural de evaluar si los residuos son ruido blanco es determinar si las autocorrelaciones

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_\tau = 0$$

para todo $\tau \geq 1$

Test de Box-Pierce

Test de Box-Pierce (1970)	
	¿Es esta serie un caso de ruido blanco?
H₀	$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$ (sí es ruido blanco)
Test	$Q^* = T \sum_{j=1}^m \hat{\rho}_j^2 \stackrel{\text{asy}}{\sim} \chi_{m-k}^2$ <small>k es número de parámetros estimados</small>
	Si $Q^* > \chi_{m-k}(1 - \alpha)$, rechazar H_0 con 100α% de significancia: la serie no es ruido blanco.

La intuición es que si la serie no es ruido blanco, algunos $\hat{\rho}_j$ serán “muy grandes”, y entonces Q^* también lo será.

Test de Ljung-Box

Test de Ljung-Box (1978)	
	¿Es esta serie un caso de ruido blanco?
H₀	$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$ (sí es ruido blanco)
Test	$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^m \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j} \stackrel{\text{asy}}{\sim} \chi_{m-k}^2$
	Si $Q > \chi_{m-k}(1 - \alpha)$, rechazar H_0 con 100α% de significancia: la serie no es ruido blanco.

Este test es similar al de Box-Pierce, pero ajustada para muestras pequeñas.

Test de Durbin-Watson

Test de Durbin-Watson (1950/1)	
	¿Hay autocorrelación de primer orden en esta serie?
H₀	$\rho_1 = 0$ (no hay autocorrelación)
Test	$d = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2} \approx 2(1 - \hat{\rho}_1) \quad (\text{si } T \text{ es grande})$
	Si d está “lejos” de 2 según los valores críticos de DW, rechazar H_0 : la serie sí presenta autocorrelación.

Esta prueba no es válida para residuos de una ecuación donde haya rezagos de la variable dependiente.

Ventajas de Box-Pierce / Ljung-Box sobre Durbin-Watson

1. Box-Pierce / Ljung-Box evalúan la existencia de autocorrelación de cualquier orden, no solo de primer orden.
2. Sus resultados también son válidos para evaluar residuos de regresiones que contienen rezagos de la variable dependiente.

Ejemplo 1-7: Pruebas de ruido blanco

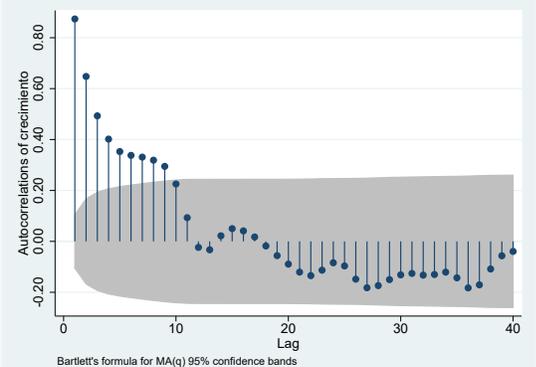
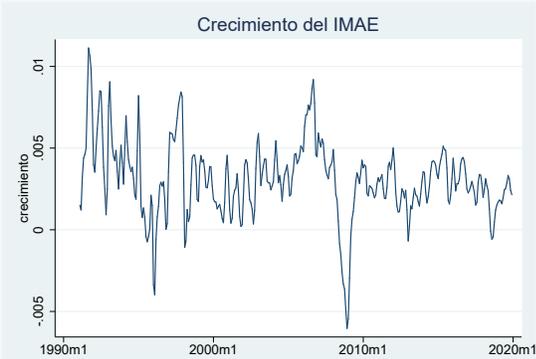
```
log_imaecsv
euro.csv
-----
wntest.ipynb
wntest.do
```

Crecimiento del IMAE

Los resultados de las pruebas Ljung-Box son consistentes con lo que obtuvimos a partir de un autocorrelograma: el crecimiento mensual del IMAE no es ruido blanco.

```
. corrgram crecimiento, lags(12) noplot
```

LAG	AC	PAC	Q	Prob>Q
1	0.8737	0.8741	267.19	0.0000
2	0.6478	-0.4903	414.48	0.0000
3	0.4931	0.4280	500.08	0.0000
4	0.4018	-0.2733	557.07	0.0000
5	0.3528	0.3654	601.15	0.0000
6	0.3378	-0.2128	641.68	0.0000
7	0.3310	0.2552	680.7	0.0000
8	0.3190	-0.1704	717.05	0.0000
9	0.2947	0.1289	748.16	0.0000
10	0.2256	-0.4269	766.44	0.0000
11	0.0931	0.0771	769.57	0.0000
12	-0.0235	0.0692	769.77	0.0000

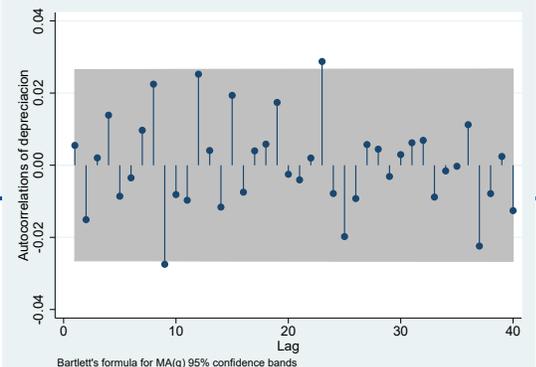
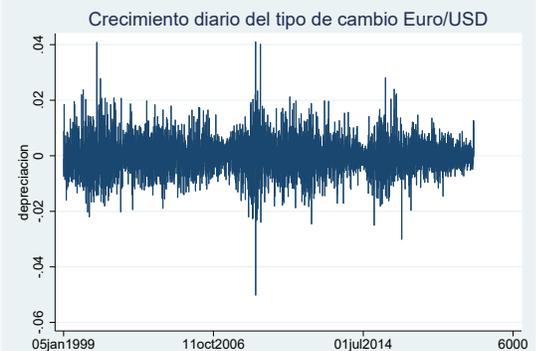


Cambios en el tipo EUR/USD

Las pruebas Ljung-Box *no rechazan* que esta serie sea ruido blanco. Pero en la gráfica parece que la varianza no es constante, por lo que posiblemente la serie tampoco sería ruido blanco.

```
. corrgram depreciacion, lags(12) noplot
```

LAG	AC	PAC	Q	Prob>Q
1	0.0055	0.0055	.16483	0.6847
2	-0.0151	-0.0151	1.4129	0.4934
3	0.0020	0.0022	1.4357	0.6972
4	0.0139	0.0136	2.4911	0.6462
5	-0.0086	-0.0087	2.8965	0.7159
6	-0.0035	-0.0030	2.9636	0.8134
7	0.0097	0.0094	3.4785	0.8375
8	0.0225	0.0222	6.2474	0.6195
9	-0.0275	-0.0273	10.384	0.3203
10	-0.0081	-0.0072	10.748	0.3775
11	-0.0097	-0.0109	11.266	0.4213
12	0.0252	0.0249	14.762	0.2547



De no-correlación a independencia y normalidad

- El hecho de que una serie no esté autocorrelacionada no implica que sus elementos sean independientes o que estén normalmente distribuidos.
- Ausencia de autocorrelación implica independencia solamente si las variables están normalmente distribuidas.
- Usualmente se asume normalidad del proceso estocástico, porque muchos tests dependen de este supuesto.
- Para evaluar si este supuesto es apropiado, analizamos los momentos tercero (asimetría) y cuarto (kurtosis).

Test de normalidad

Test de Jarque-Bera(1980)	
	¿Es esta serie normal?
H_0	$S \equiv \mathbb{E} \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right)^3 = 0, K \equiv \mathbb{E} \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right)^4 = 3$ (sí es)
Test	$JB = \frac{T}{6} \left(\hat{S}^2 + \frac{1}{4} \left(\hat{K} - 3 \right)^2 \right) \sim \chi_2^2$
	Si $JB > \chi_2^2(1 - \alpha)$, rechazar H_0 con $100\alpha\%$ de significancia: la serie no es normal.

Referencias del capítulo 1

- Boumans, Marcel J. (15 de feb. de 2015). *Econometrics: The Keynes-Tinbergen Controversy*. URL: <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2565355>.
- Hamilton, James M. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. ISBN: 0-691-04289-6.
- Kirchgässner, Gebhard, Jürgen Wolters y Uwe Hassler (2013). *Introduction to Modern Time Series Analysis*. 2ª ed. Springer. ISBN: 978-3-642-33435-1.
- Valadkhani, Abbas (2004). "History of macroeconomic modelling: lessons from past experience". En: *Journal of Policy Modeling* 26, págs. 265-281.

Capítulo 2

Ecuaciones en diferencia

En este capítulo

2.1	Solución por sustituciones recursivas	26
2.2	Solución por combinación de soluciones homogéneas y particulares	33
2.3	Solución por medio del operador de rezagos	36

Introducción

- Este tema constituye el primer paso para el estudio de la econometría de series de tiempo
- En esta presentación, se asumirá que todas las variables son determinísticas (no estocásticas).
- El interés de esta presentación es el estudio de las consecuencias *dinámicas* de eventos a través del *tiempo*.
- Se limita la exposición a ecuaciones en diferencia lineales.

Ecuación en diferencia lineal de orden p

- La variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de primer orden cuando depende de sus últimos p valores

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- Si $w_t = 0$ en todo período t , obtenemos la ecuación en diferencia lineal homogénea

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = 0$$

- Nuestra meta es responder a: *¿cuál es el efecto sobre la trayectoria de y de un cambio en w ?*

Ecuación en diferencia de primer orden

- Si $p = 1$, la variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de primer orden

$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$$

- En este caso, la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_t - \phi y_{t-1} = 0$$

2.1 Solución por sustituciones recursivas

Solución de la ecuación de primer orden

- Dado un valor inicial y_{-1} y la secuencia

$$\{w_0, w_1, \dots, w_t\}$$

la ecuación puede resolverse de manera recursiva como:

$$y_t = \phi^{t+1}y_{-1} + \phi^t w_0 + \phi^{t-1}w_1 + \dots + \phi w_{t-1} + w_t$$

Multiplicador dinámico: shock transitorio

- La solución es similar si se desea expresar y_{t+j} a partir de y_t

$$y_{t+j} = \phi^{j+1}y_{t-1} + \phi^j w_t + \phi^{j-1}w_{t+1} + \dots + \phi w_{t+j-1} + w_{t+j}$$

- El multiplicador dinámico se obtiene simplemente como:

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \phi^j$$

- El proceso es estable si y sólo si $|\phi| < 1$

Valor presente

- Sea β el factor de descuento. Se define el valor presente:

$$VP = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t+j}$$

- ¿Cuál es el efecto de un cambio en w_t sobre el VP de y ?

$$\frac{\partial VP}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \phi^j = \frac{1}{1 - \beta\phi}$$

siempre y cuando $|\beta\phi| < 1$.

Efecto de un shock permanente

- Supóngase que el cambio en w_t es permanente.
- ¿Qué efecto tiene sobre y en el largo plazo?

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^j \frac{\partial y_{t+k}}{\partial w_t} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^j \phi^{j-k} = \frac{1}{1 - \phi}$$

siempre y cuando $|\phi| < 1$.

Efecto acumulado de un shock transitorio

- Se desea la suma de los cambios en y como consecuencia de un único cambio en w_t .
- Esto corresponde al ejemplo del VP cuando $\beta = 1$:

$$\text{EA} = \sum_{j=0}^{\infty} 1^j \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j = \frac{1}{1-\phi}, \quad |\phi| < 1.$$

Nótese que el EA de un shock transitorio es igual al efecto de un shock permanente en el largo plazo.

Ecuación en diferencia de orden p

- La variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de primer orden cuando depende de sus últimos p valores

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- Es muy complicado analizar por sustitución recursiva la dinámica de una ecuación de orden p .
- Afortunadamente es muy simple expresarla como una ecuación vectorial en diferencia de orden 1, que se resuelve de manera similar a la ecuación escalar.

Solución de la ecuación de orden p

Para resolverla se definen:

$$\xi_t \equiv \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}, \quad F \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \dots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_t \equiv \begin{bmatrix} w_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

con lo que la ecuación de orden p que puede escribirse:

$$\xi_t = F\xi_{t-1} + v_t$$

y resolverse como:

$$\xi_{t+j} = F^{j+1}\xi_{t-1} + F^j v_t + F^{j-1} v_{t+1} + \dots + F v_{t+j-1} + v_{t+j}$$

Nota: Descomposición espectral de una matriz**Descomposición espectral de una matriz**

Si los eigenvectores de la matriz cuadrada A son linealmente independientes, entonces

$$A = CAC^{-1}$$

donde Λ es la matriz diagonal formada por los eigenvalores de A :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

y las columnas de C son los correspondientes eigenvectores de A .

Potencia de una matriz

Si A tiene la descomposición espectral $A = C\Lambda C^{-1}$ es fácil calcular su t -ésima potencia:

$$A^t = C\Lambda^t C^{-1}$$

ya que

$$\Lambda^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2-1: Resolviendo $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$

La ecuación puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\xi_t \qquad F \qquad \xi_{t-1} \qquad v$

Por sustitución recursiva encontramos

$$\begin{aligned} \xi_t &= (I + F + F^2 + \dots + F^{t-2})v + F^{t-1}\xi_1 \\ &= (I - F)^{-1}(I - F)(I + F + F^2 + \dots + F^{t-2})v + F^{t-1}\xi_1 \\ &= (I - F)^{-1}(I - F^{t-1})v + F^{t-1}\xi_1 \end{aligned}$$

Necesitamos una expresión para F^{t-1} . Para ello, buscamos la descomposición espectral de F .

Encontramos los eigenvalores de F :

$$\begin{vmatrix} 0.9 - \lambda & -0.2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.2 = (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.4) = 0$$

es decir, $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.4$.

Es fácil mostrar que los eigenvectores son $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \\
 F^{t-1} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{t-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \\
 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{t-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^t - \lambda_2^t & -\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^{t-1} - \lambda_2^{t-1}) \\ \lambda_1^{t-1} - \lambda_2^{t-1} & -\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^{t-2} - \lambda_2^{t-2}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de λ_1 y λ_2

$$F^{t-1} = \begin{bmatrix} 10(0.5^t - 0.4^t) & -2(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) \\ 10(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) & -2(0.5^{t-2} - 0.4^{t-2}) \end{bmatrix}$$

Por otra parte:

$$(I - F)^{-1} = \frac{10}{3} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación vectorial:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-10(0.5^t-0.4^t) & 2(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) \\ -10(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) & 1-2(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &\begin{bmatrix} 10(0.5^t-0.4^t) & -2(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) \\ 10(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) & -2(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \\
 \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-10(0.5^t-0.4^t) \\ -10(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10(0.5^t-0.4^t) & -2(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) \\ 10(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}) & -2(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tomando la primera fila

$$\begin{aligned}
 y_t &= 10 - 100(0.5^t - 0.4^t) + 20(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) + \\
 &\quad 10y_1(0.5^t - 0.4^t) - 2y_0(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_t &= 10 + 10(y_1 - 10)(0.5^t - 0.4^t) - 2(y_0 - 10)(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}) \\
 &= 10 + (10y_1 - 100)(0.5^t - 0.4^t) + (20 - 2y_0)(2 \times 0.5^t - 2.5 \times 0.4^t) \\
 &= 10 + (10y_1 - 4y_0 - 60)0.5^t - (10y_1 - 5y_0 - 50)0.4^t
 \end{aligned}$$

Si imponemos las 2 condiciones iniciales: $y_0 = 13$, $y_1 = 11.3$, la solución de la ecuación es:

$$y_t = 10 + 0.5^t + 2 \times 0.4^t$$

Multiplicador dinámico: caso orden p

- De nuevo el multiplicador dinámico se obtiene por derivación:

$$\frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v_t'} = F^j$$

- El primer elemento de ξ_{t+j} es y_{t+j} y el primer elemento de v_t es w_t , por lo tanto:

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = F_{(11)}^j$$

- Ahora la estabilidad depende de F^j .

Estabilidad

- Que F^j tienda a 0 cuando j crece al infinito depende de los eigenvalores de F .
- Si todos son distintos, entonces $F^j = T\Lambda^j T^{-1}$, donde:

$$F^j = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{p1} & t_{p2} & \dots & t_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{11} & t^{12} & \dots & t^{1p} \\ t^{21} & t^{22} & \dots & t^{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{p1} & t^{p2} & \dots & t^{pp} \end{bmatrix}$$

- por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} &= F_{(11)}^j = (t_{11}t^{11})\lambda_1^j + (t_{12}t^{21})\lambda_2^j + \dots + (t_{1p}t^{p1})\lambda_p^j \\ &= c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j + \dots + c_p\lambda_p^j \end{aligned}$$

Obteniendo los eigenvalores y los ponderadores

- Los eigenvalores de F se obtienen de resolver:

Ecuación característica

$$|F - \lambda I_p| = \lambda^p - \phi_1\lambda^{p-1} - \phi_2\lambda^{p-2} - \dots - \phi_{p-1}\lambda - \phi_p = 0$$

- Mientras que c_i se obtiene de:

$$c_i = \frac{\lambda_i^{p-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p (\lambda_i - \lambda_k)}$$

- Nótese que:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_p = (t_{11}t^{11}) + (t_{12}t^{21}) + \dots + (t_{1p}t^{p1}) = 1$$

Dinámica de ajuste

- Dado que

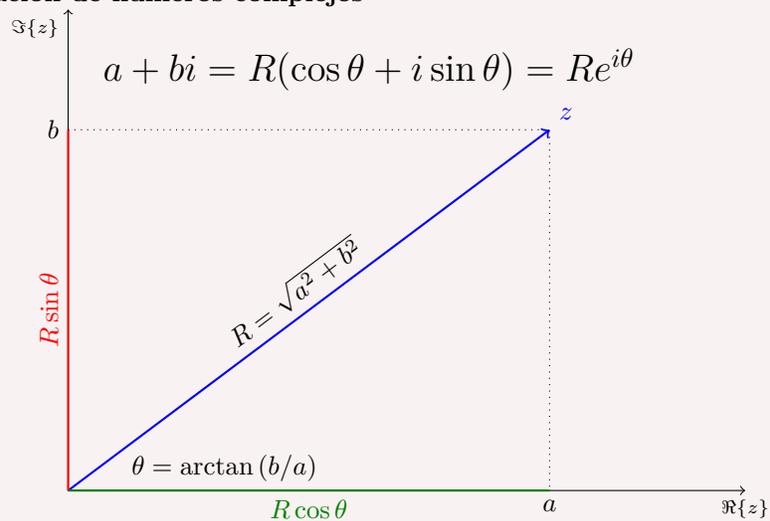
$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} &= c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j + \dots + c_p\lambda_p^j \\ 1 &= c_1 + c_2 + \dots + c_p \end{aligned}$$

el multiplicador dinámico es un promedio ponderado de las potencias de los eigenvalores.

- La forma del ajuste dependerá del eigenvalor de mayor valor absoluto λ_{max}
 - Si $0 < \lambda_{max} < 1$, el MD decae geoméricamente.
 - Si $-1 < \lambda_{max} < 0$, el MD decae alternando
 - Si $|\lambda_{max}| > 1$, la serie explota (no converge)

Nota: Números complejos

Representación de números complejos



Multiplicación de números complejos

- Si $z = Re^{i\theta}$ y $w = Se^{i\varphi}$, entonces su producto es

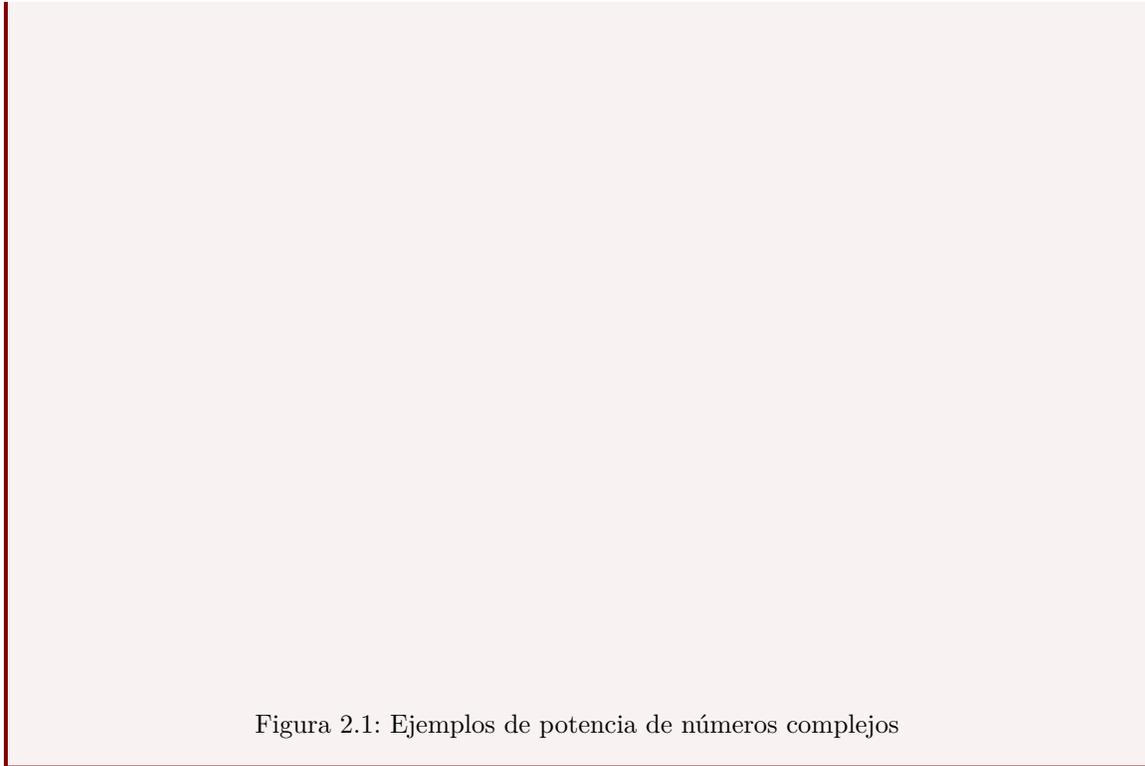
$$zw = RSe^{i(\theta+\varphi)}$$

- Así, si elevamos z a la n -ésima potencia:

$$z^n = (Re^{i\theta})^n = R^n e^{in\theta}$$

- Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0 \Leftrightarrow |R| < 1$$



Dinámica de ajuste (2)

- ¿Cómo se da el ajuste si λ_{max} es complejo?
- Se sabe que si $\lambda_1 = a + bi$, entonces $\lambda_2 = a - bi$
- Si expresamos λ_j en coordenadas polares:

$$\lambda_1 = R[\cos \theta + i \sin \theta] = Re^{i\theta}$$

$$\lambda_2 = R[\cos \theta - i \sin \theta] = Re^{-i\theta}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = R \cos \theta$$

$$b = R \sin \theta$$

- De lo anterior:

$$\lambda_1^j = R^j e^{ij\theta} = R^j [\cos j\theta + i \sin j\theta]$$

$$\lambda_2^j = R^j e^{-ij\theta} = R^j [\cos j\theta - i \sin j\theta]$$

Dinámica de ajuste (3)

- El promedio de estos dos eigenvalores es:

$$c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j = c_1 R^j [\cos j\theta + i \sin j\theta] + c_2 R^j [\cos j\theta - i \sin j\theta]$$

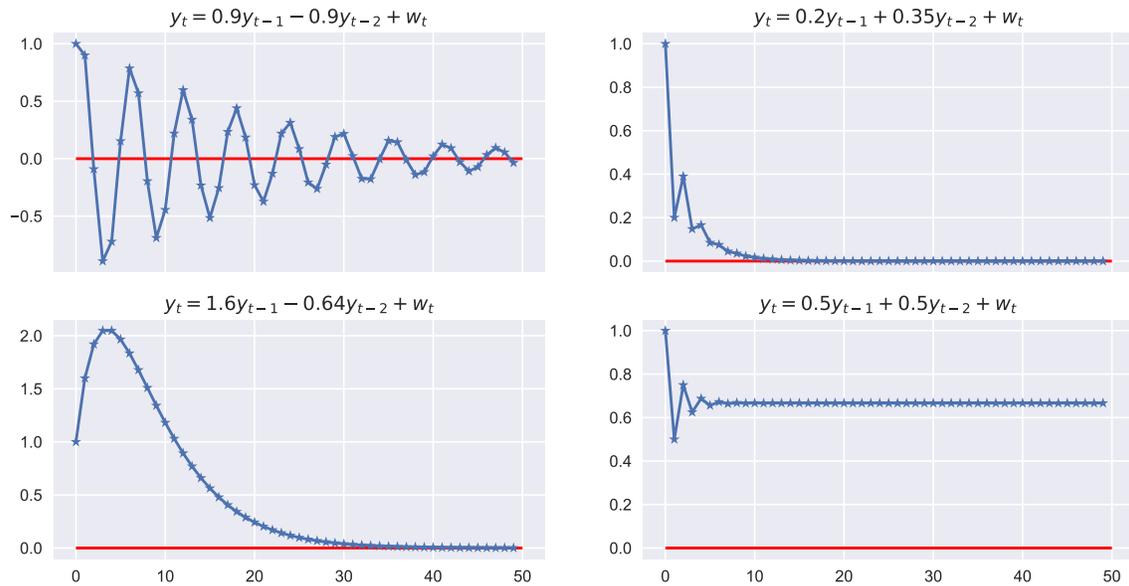
$$= R^j [(c_1 + c_2) \cos j\theta + i(c_1 - c_2) \sin j\theta]$$

Pero c_1 y c_2 son conjugados: $c_1, c_2 = \alpha \pm \beta i$

$$= R^j [2\alpha \cos j\theta - 2\beta \sin j\theta]$$

- que en función de j es periódica, con frecuencia θ y período $\frac{2\pi}{\theta}$

Ejemplo de dinámica de ajuste cuando $p = 2$



Valor presente

- Recordando que

$$\frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v_t^i} = F^j$$

Se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v_t^i} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j F^j = (I_p - \beta F)^{-1}$$

En este caso su elemento 1,1 es

$$\frac{1}{1 - \phi_1\beta - \phi_2\beta^2 - \dots - \phi_p\beta^p}$$

Efecto acumulado y multiplicador de largo plazo

- Se obtiene del VP en el caso particular en que $\beta = 1$:

$$\frac{1}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

2.2 Solución por combinación de soluciones homogéneas y particulares

La estrategia de solución

Para resolver la ecuación lineal en diferencia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

seguimos estos pasos

Paso 1: Formamos la ecuación homogénea $y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p} = 0$ y encontramos sus p soluciones;

Paso 2: Encontramos una solución particular;

Paso 3: Obtenemos la solución general como la suma de la solución particular y una combinación lineal de todas las soluciones homogéneas;

Paso 4: Eliminamos las constantes arbitrarias imponiendo p condiciones iniciales en el problema.

Ecuación homogénea de primer orden

- Para la ecuación

$$y_t = \phi y_{t-1} \Rightarrow y_t - \phi y_{t-1} = 0$$

- Solución trivial: $y_t = y_{t-1} = \dots = 0$, pero no es única.
- La expresión $y_t^h = \phi^t$ también es una solución:

$$\phi^t - \phi(\phi^{t-1}) = 0$$

$$\underset{y_t^h}{\phi^t} - \phi \underset{y_{t-1}^h}{(\phi^{t-1})} = 0$$

- Pero si y_t^h es una solución, entonces Ay_t^h también lo es, para cualquier escalar A :

$$Ay_t^h - \phi(Ay_{t-1}^h) = A(y_t^h - \phi y_{t-1}^h) = 0$$

Condición inicial para la ecuación homogénea de primer orden

- Hemos obtenido que $y_t = A\phi^t$ resuelve $y_t - \phi y_{t-1} = 0$
- Para determinar un valor específico de A , necesitamos una condición inicial.
- Por ejemplo, supongamos que el valor de y_t en $t = 0$ es conocido. Entonces:

$$y_0 = A\phi^0 \Rightarrow A = y_0$$

- Por lo que en ese caso la solución de la ecuación sería

$$y_t = \phi^t y_0$$

Ecuación homogénea de orden p

- Para la ecuación

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_{p-1} y_{t-p+1} - \phi_p y_{t-p} = 0$$

- Solución trivial es de nuevo: $y_t = y_{t-1} = \dots = 0$.
- Supongamos que la expresión $y_t^h = z^t$ también es una solución. Sustituyendo en la ecuación:

$$z^t - \phi_1 z^{t-1} - \phi_2 z^{t-2} - \dots - \phi_{p-1} z^{t-p+1} - \phi_p z^{t-p} = 0$$

$$z^{t-p} [z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \dots - \phi_{p-1} z^1 - \phi_p z^0] = 0$$

- Hemos logrado cambiar el problema original por el de encontrar los ceros de un polinomio de grado p :

$$z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \dots - \phi_{p-1} z - \phi_p = 0$$

- Esta es la misma ecuación característica que encontramos en la sección anterior.

Resolviendo la ecuación característica

- Todo polinomio de grado p tiene exactamente p raíces, no necesariamente distintas o reales.
- Supongamos que z_1, z_2, \dots, z_p son las raíces del polinomio.
- Las soluciones homogéneas son entonces

$$y_t^h \in \{z_1^t, z_2^t, \dots, z_p^t\}$$

- Cualquier combinación lineal de estas soluciones $y_t^h = A_1 z_1^t + \dots + A_p z_p^t$ también es una solución:

$$\begin{aligned} y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} &= (A_1 z_1^t + \dots + A_p z_p^t) - \\ &\phi_1 (A_1 z_1^{t-1} + \dots + A_p z_p^{t-1}) - \dots - \phi_p (A_1 z_1^{t-p} + \dots + A_p z_p^{t-p}) = \\ &A_1 (z_1^t - \phi_1 z_1^{t-1} - \dots - \phi_p z_1^{t-p}) + \dots + A_p (z_p^t - \phi_1 z_p^{t-1} - \dots - \phi_p z_p^{t-p}) = \\ &A_1 z_1^{t-p} (z_1^p - \phi_1 z_1^{p-1} - \dots - \phi_p) + \dots + A_p z_p^{t-p} (z_p^p - \phi_1 z_p^{p-1} - \dots - \phi_p) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2-2: Resolviendo $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$

 EqDiff2.ipynb

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$$

Paso 1: Resolvemos la ecuación homogénea $y_t - 0.9y_{t-1} + 0.2y_{t-2} = 0$:

$$\begin{aligned} z^2 - 0.9z + 0.2 &= (z - 0.4)(z - 0.5) = 0 \\ z \in \{0.4, 0.5\} &\Rightarrow y_{1,t}^h = 0.4^t, y_{2,t}^h = 0.5^t \end{aligned}$$

Es fácil verificar que son las soluciones:

$$\begin{aligned} 0.4^t - 0.9(0.4)^{t-1} + 0.2(0.4)^{t-2} &= (0.4)^{t-2} [(0.4)^2 - 0.9(0.4) + 0.2] = 0 \\ 0.5^t - 0.9(0.5)^{t-1} + 0.2(0.5)^{t-2} &= (0.5)^{t-2} [(0.5)^2 - 0.9(0.5) + 0.2] = 0 \end{aligned}$$

Paso 2: Supongamos que $y_t^p = c$, una constante, es una solución particular:

$$c = 0.9c - 0.2c + 3 \Rightarrow c = 10 \Rightarrow y_t^p = 10$$

Paso 3: Obtenemos la solución general como la suma de la solución particular y una combinación lineal de todas las soluciones homogéneas:

$$y_t = A_1(0.4)^t + A_2(0.5)^t + 10$$

Paso 4: Eliminamos A_1, A_2 imponiendo 2 condiciones iniciales: $y_0 = 13, y_1 = 11.3$.

$$\begin{cases} 13 &= A_1 + A_2 + 10 \\ 11.3 &= 0.4A_1 + 0.5A_2 + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 &= 3 \\ 0.4A_1 + 0.5A_2 &= 1.3 \end{cases}$$

entonces $A_1 = 2, A_2 = 1$ y la solución general de la ecuación es:

$$y_t = 2(0.4)^t + (0.5)^t + 10$$

Podemos también resolver este sistema utilizando el paquete `sympy` de Python:

```

1 from sympy import Function, rsolve
2 from sympy.abc import t
3
4 y = Function('y')
5 rsolve(y(t) - 0.9*y(t-1) + 0.2*y(t-2) - 3, y(t), {y(0):13, y(1):
    11.3})

```

2.3 Solución por medio del operador de rezagos

Introducción

- Este tema constituye una herramienta para simplificar el análisis de ecuaciones en diferencia
- Se asumirá que todas las variables son determinísticas (no estocásticas).
- Se limita la exposición a ecuaciones en diferencia lineales.

Ecuación en diferencia de primer orden

- En este caso

$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$$

- Utilizando el operador de rezagos se resuelve así:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \phi L y_t + w_t \\
 (1 - \phi L)y_t &= w_t \\
 (1 + \phi L + \dots + \phi^t L^t)(1 - \phi L)y_t &= (1 + \phi L + \dots + \phi^t L^t) w_t \\
 (1 - \phi^{t+1} L^{t+1}) y_t &= w_t + \phi w_{t-1} + \dots + \phi^t w_0
 \end{aligned}$$

- Así

$$y_t = \phi^{t+1} y_{-1} + w_t + \phi w_{t-1} + \dots + \phi^t w_0$$

Solución de “largo plazo”

- En este caso

$$\begin{aligned}
 (1 - \phi L)y_t &= w_t \\
 (1 - \phi L)^{-1}(1 - \phi L)y_t &= (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots) w_t \\
 y_t &= w_t + \phi w_{t-1} + \phi^2 w_{t-2} + \dots
 \end{aligned}$$

siempre y cuando $|\phi| < 0$.

Ecuación en diferencia de orden p

- La variable y_t evoluciona como

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- Con operador de rezagos:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = w_t$$

- Para factorizar el polinomio es necesario resolver

$$f(z) \equiv 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

- Con el cambio de variable $z = \frac{1}{\lambda}$ obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - \phi_1 \left(\frac{1}{\lambda}\right) - \phi_2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \dots - \phi_p \left(\frac{1}{\lambda}\right)^p &= 0 \\ \lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \dots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la misma expresión que se obtuvo con álgebra de matrices: por lo tanto las raíces de $f(z)$ son los *recíprocos* de las raíces anteriores.

Estabilidad

- Dada la relación existente entre las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p &= 0 \\ \lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \dots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p &= 0 \end{aligned}$$

está claro que para que el proceso sea estable es necesario que las raíces de

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

estén *fuera* del círculo unitario, esto es, si z_i es raíz, entonces $|z_i| > 1$.

Referencias del capítulo 2

Enders, Walter (2014). *Applied Econometric Time Series*. 4^a ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-80856-6.
Hamilton, James M. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. ISBN: 0-691-04289-6.

Bibliografía

- Bardsen, Gunnar y col. (2005). *The Econometrics of Macroeconomic Modelling*.
- Boumans, Marcel J. (15 de feb. de 2015). *Econometrics: The Keynes-Tinbergen Controversy*. URL: <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2565355>.
- Box, George E. P. y col. (2016). *Time Series Analysis*. 5ª ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-67502-1.
- Enders, Walter (2014). *Applied Econometric Time Series*. 4ª ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-80856-6.
- Hamilton, James M. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. ISBN: 0-691-04289-6.
- Kirchgässner, Gebhard, Jürgen Wolters y Uwe Hassler (2013). *Introduction to Modern Time Series Analysis*. 2ª ed. Springer. ISBN: 978-3-642-33435-1.
- Lütkepohl, Helmut y Markus Kratzig, eds. (2004). *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-83919-8.
- Mills, Terence C. (2019). *Applied Time Series Analysis. A Practical Guide to Modeling and Forecasting*. Academic Press. ISBN: 978-0-12-813117-6.
- Valadkhani, Abbas (2004). “History of macroeconomic modelling: lessons from past experience”. En: *Journal of Policy Modeling* 26, págs. 265-281.