El modelo de crecimiento de Solow-Swan

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC3300 - Crecimiento Económico

II Semestre 2021

Última actualización: 8 de septiembre de 2021

Tabla de contenidos

El modelo de crecimiento de Solow: Introducción

- Desarrolla un esquema simple para explicar las causas próximas y la mecánica del crecimiento económico y las diferencias de ingreso entre países.
- Modelo de Solow-Swan así llamado por el trabajo de Robert (Bob) Solow y Trevor Swan, o simplemente el modelo de Solow.
- Antes del modelo de este modelo, el enfoque más común al estudio del crecimiento económico se basó en el modelo de Harrod-Domar.
- El modelo de Harrod-Domar enfatiza aspectos potencialmente disfuncionales del crecimiento: e.g, cómo el crecimiento podía ir de la mano con aumentos en el desempleo.
- El modelo de Solow demostró porqué el modelo de Harrod-Domar no era un buen punto de partida.
- En el centro del modelo de Solow está la función neoclásica de producción agregada.

1. El modelo de Solow en tiempo discreto

Hogares y producción

- Asumimos una economía cerrada, con un único bien final.
- Tiempo discreto y horizonte infinito, tiempo indexado por $t = 0, 1, 2, \ldots$
- La economía está habitada por un gran número de hogares, y por ahora los hogares no están optimizando. Esta es la principal diferencia entre el modelo de Solow y el model neoclásico de crecimiento.
- Por facilidad, asumimos que todos los hogares son idénticos, por lo que la economía puede modelarse con un hogar representativo.

Hogares y producción (cont'n)

- Asumimos que el hogar representativo ahorra una fracción constante exógena s de su ingreso disponible.
- Este supuesto es igual al del modelo keynesiano básico y del modelo de Harrod-Domar; aunque no es realista.
- Asumimos que todas las empresas tienen acceso a la misma función de producción: podemos modelar la economía con una empresa representativa, y con una función de producción representativa o agregada.
- La función de producción agregada del único bien final es

$$Y(t) = F[K(t), L(t), A(t)] \tag{1}$$

- Asumimos que el bien de capital es el mismo que el bien final, solo que se utiliza en el proceso de producción de más bienes.
- $A(t)$ es una variable de escala de la función de producción 1. Noción amplia de "tecnología".
- Supuesto grande: la tecnología es libre; está disponible públicamente como un bien no-excluyente y no-rival.

Primer supuesto clave

Supuesto 1: Continuidad, diferenciabilidad, productos marginales positivos y decrecientes, y retornos constantes de escala

La función de producción $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$ es dos veces continuamente diferenciable en K y L, y satisface

$$F_K(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(\cdot)}{\partial K} > 0, \qquad F_L(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L} > 0$$

$$F_{KK}(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial K^2} < 0, \qquad F_{LL}(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial L^2} < 0$$

Además, F exhibe rendimientos constantes de escala en K y L: es decir, es linealmente homogénea (homogénea de grado 1) en estas dos variables.

Nota:

Funciones homogéneas

Definición: Función homogénea

Sea K un entero. La función $g : \mathbb{R}^{K+2} \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado m en $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ si y solo si

$$g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m g(x, y, z) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ y } z \in \mathbb{R}^K$$

Teorema de Euler

Suponga que $g : \mathbb{R}^{K+2} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$, con derivadas parciales denotadas como g_x y g_y, y que es homogénea de grado m en x y y. Entonces

$$mg(x, y, z) = g_x(x, y, z)x + g_y(x, y, z)y$$
$$\text{para todo } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ y } z \in \mathbb{R}^K$$

Además, $g_x(x, y, z)$ y $g_y(x, y, z)$ son asimismo homogéneas de grado $m - 1$ en x y y.

Estructura de mercado, dotaciones, y equilibrio de mercado

- Asumiremos que los mercados son competitivos, por lo que nuestro modelo ser[a un modelo de equilibrio general competitivo prototípico.
- Los hogares son dueños de todo el trabajo, el cual ofrecen de manera inelástica.
- La dotación de trabajo en la economía es $\bar{L}(t)$, toda se ofrece independientemente del precio (salario).
- La condición de equilibrio de mercado laboral es entonces:

$$L(t) = \bar{L}(t)$$

  para todo t, donde $L(t)$ denota la demanda por trabajo (y también el nivel de empleo).
- En términos más generales, debe escribirse en forma de condición de holgura complementaria.
- En particular, sea la tasa salarial $w(t)$ en t, entonces la condición de equilibrio del mercado laboral es

$$L(t) \leq \bar{L}(t), \quad w(t) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad (L(t) - \bar{L}(t))w(t) = 0$$

Estructura de mercado, dotaciones, y equilibrio de mercado (cont'n)

- Pero el Supuesto 1 y el mercado laboral competitivo implican que la tasa salarial debe ser estrictamente positiva.
- Los hogares también son dueños del stock de capital de la economía, el cual alquilan a las empresas.
- Denotemos el precio de renta del capital en t como $R(t)$.
- Condición de equilibrio del mercado de capital:

$$K^s(t) = K^d(t)$$

- Tomamos como dada la dotación inicial de capital, $K(0)$.
- $P(t)$ es el precio del bien final en t, el cual normalizamos a 1 en todos los periodos.
- Basado en una idea de Kenneth Arrow (1964) de que es suficiente ponerle precio a los activos que tranfieren una unidad de consumo de una fecha (o estado del mundo) a otra.

Estructura de mercado, dotaciones, y equilibrio de mercado (cont'n)

- Esto implica que necesitamos llevar seguimiento de una tasa de interés entre períodos, $r(t)$, lo que nos permitirá normalizar a 1 el precio del bien final en cada periodo.
- Economía de equilibrio general, en la que distintas mercancías corresponden al mismo bien en fechas distintas.
- El mismo bien en fechas distintas (o en distintos estados o lugares) es una mercancía distinta.
- Por tanto, habrá un número infinito de mercancías.
- Asumimos que el capital se deprecia de manera exponencial, a la tasa δ : de cada 1 unidad de capital este periodo, solo $1 - \delta$ queda para el siguiente periodo.
- La pérdida de parte del capital afecta la tasa de interés (tasa de retorno de los ahorros) que enfrentan los hogares: $r(t) = R(t) - \delta$.

Optimización de la empresa

- Solo necesitamos considerar el problema de la empresa representativa:

$$\max_{L(t)\geq 0, K(t)\geq 0} F[K(t), L(t), A(t)] - w(t)L(t) - R(t)K(t)$$

- Como no hay inversiones irreversibles ni costos de ajuste, el lado de la producción puede representarse como un problema de optimización estático.
- Equivalentemente, puede plantearse como un problema de minimización de costos.
- Asuntos a los que debemos prestar atención:
  1. El problema se plantea en términos de variables agregadas.
  2. Nada multiplica al término F: el precio del bien final ha sido normalizado a 1 .
  3. Ya se imponen mercados competitivos de factores: la empresa toma como dados a $w(t)$ y $R(t)$.
  4. Problema cóncavo, porque F es cóncava.

- Como F es diferenciable, las condiciones de primer orden implican:

$$w(t) = F_L[K(t), L(t), A(t)]$$
$$R(t) = F_K[K(t), L(t), A(t)]$$

- Note también que en estas dos ecuaciones usamos $K(t)$ y $L(t)$, la cantidad de capital y de trabajo utilizados por la empresa.
- De hecho, despejando $K(t)$ y $L(t)$, podemos obtener la demanda por capital y trabajo de la empresa a los precios de alquiler $R(t)$ y $w(t)$.
- Por ello, pudimos haber usado $K^d(t)$ en vez de $K(t)$, pero esta notación adicional es innecesaria.

Proposición

Supongamos que se cumple el Supuesto 1. Entonces en el equilibrio del modelo de crecimiento de Solow, la empresa no obtiene ganancias, y en particular,

$$Y(t) = w(t)L(t) + R(t)K(t)$$

- Prueba: Se sigue del teorema de Euler para el caso $m = 1$, i.e., rendimientos constantes de escala.
- Como la empresa no obtiene ganancias, no es necesario especificar a quién le pertenece esa empresa.

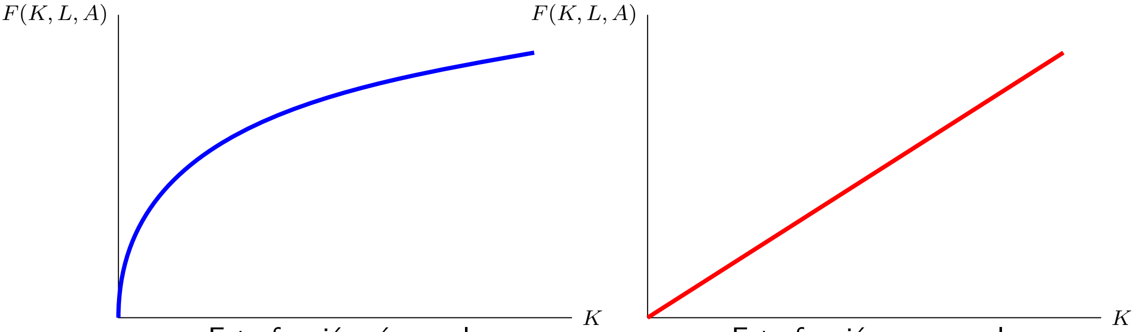
Segundo supuesto clave

Supuesto Condiciones Inada

F satisfies the Inada conditions

$$\lim_{K\to 0} F_K(\cdot) = \infty \text{ and } \lim_{K\to\infty} F_K(\cdot) = 0 \text{ for all } L > 0 \text{ all } A$$
$$\lim_{L\to 0} F_L(\cdot) = \infty \text{ and } \lim_{L\to\infty} F_L(\cdot) = 0 \text{ for all } K > 0 \text{ all } A.$$

- Son importantes para asegurar la existencia de equilibrio interior.
- Puede prescindirse de este supuesto más adelante, pero es útil como punto de partida.



Esta función sí cumple las condiciones Inada

Esta función no cumple las condiciones Inada

Figura: Funciones de producción y producto marginal del capital.

Ley fundamental de movimiento del modelo de Solow

- Dado que K se deprecia exponencialmente a la tasa δ, entonces

$$K(t+1) = (1-\delta)K(t) + I(t)$$

  donde $I(t)$ es la inversión del periodo t.

- De las cuentas nacionales para una economía cerrada

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

- La regla de comportamiento de una tasa constante de ahorro simplifica considerablemente la estructura de equilibrio.
- Nótese que no se deriva de la maximización de función de utilidad: las comparaciones de bienestar deben tomarse con cautela.

Ley fundamental de movimiento del modelo de Solow (cont'n)

- Como la economía es cerrada y no hay gasto del gobierno,

$$S(t) = I(t) = Y(t) - C(t)$$

- Se asume que los hogares ahorran una fracción constante s de su ingreso,

$$\begin{aligned} S(t) &= sY(t) \\ C(t) &= (1-s)Y(t) \end{aligned}$$

- Esto implica que la oferta de capital resultante del comportamiento de los hogares puede expresarse como

$$\begin{aligned} K^s(t) &= (1-\delta)K(t) + S(t) \\ &= (1-\delta)K(t) + sY(t) \end{aligned}$$

Ley fundamental de movimiento del modelo de Solow (cont'n)

- Igualando la oferta con la demanda, esto implica que $K^s(t) = K(t)$.
- También tenemos que $L(t) = \bar{L}(t)$.
- Combinando estas condiciones de equilibrio de mercado con

$$\begin{aligned} Y(t) &= F[K(t), L(t), A(t)] \\ K(t+1) &= (1-\delta)K(t) + sY(t) \end{aligned}$$

obtenemos la ley fundamental de movimiento del modelo de crecimiento de Solow:

$$K(t+1) = sF[K(t), L(t), A(t)] + (1-\delta)K(t)$$

- Esta es una ecuación en diferencias no lineal.
- El equilibrio del modelo de Solow se describe con esta ecuación y las ecuaciones de movimiento de $L(t)$ (o $\bar{L}(t)$) y $A(t)$.

Definición de equilibrio

Definición: Senda de equilibrio del modelo básico de Solow

En el modelo básico de Solow para una secuencia dada $\{L(t), A(t)\}_{t=0}^{\infty}$ y un *stock* inicial de capital $K(0)$, una senda de equilibrio es una secuencia de stocks de capital, niveles de producción, niveles de consumo, tasas salariales y de alquiler de capital

$$\{K(t), Y(t), C(t), w(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$$

tal que

- el capital satisface $K(t+1) = sF[K(t), L(t), A(t)] + (1-\delta)K(t)$,
- el producto está dado por $Y(t) = F[K(t), L(t), A(t)]$,
- el consumo está dado por $C(t) = (1-s)Y(t)$,
- la tasa salarial está dada por $w(t) = F_L[K(t), L(t), A(t)]$
- y la tasa de alquiler de capital por $R(t) = F_K[K(t), L(t), A(t)]$.

Algunos apuntes

- El modelo de Solow es una mezcla de un modelo de *estilo antiguo* keynesiano y un modelo macroeconómico dinámico *moderno*.
- Los hogares no optimizan, pero las empresas sí maximizan y los mercados se equilibran.
- Note que un equilibrio se define como una senda completa de asignaciones y precios: no es un objeto estático.

El modelo en términos per cápita

- Añadimos dos nuevos supuestos, que serán relajados más adelante:
  1. La población no crece: la población total es constante a un nivel $L > 0$. Como la oferta de trabajo de los hogares es inelástica, $L(t) = L$.
  2. No hay cambio tecnológico, así que $A(t) = A$.
- Definamos la razón capital-trabajo de la economía como

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{L}$$

- Usando el supuesto de rendimientos constantes de escala, podemos expresar el producto (ingreso) per cápita, $y(t) \equiv Y(t)/L$, como

$$\begin{aligned} y(t) &= F\left[\frac{K(t)}{L}, 1, A\right] \\ &\equiv f(k(t)) \end{aligned}$$

El modelo en términos per cápita (cont'n)

- Notemos que $f(k)$ depende de A, así que pudimos escribir $f(k, A)$; pero A es constante y puede normalizarse a $A = 1$.
- Por el teorema de Euler,

$$
\begin{aligned}
R(t) &= f'(k(t)) > 0 \\
w(t) &= f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) > 0
\end{aligned}
$$

- Ambos son positivos por el supuesto 1.

Ejemplo 1:

La función de producción Cobb-Douglas

- Una función de producción muy especial pero ampliamente utilizada:

$$\begin{aligned} Y(t) &= F[K(t), L(t), A(t)] \\ &= AK(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

- Satisface los Supuestos 1 y 2.
- Dividiendo ambos lados por $L(t)$

$$y(t) = Ak(t)^{\alpha},$$

- Como $R(t) = f'(k(t))$,

$$R(t) = \frac{\partial Ak(t)^{\alpha}}{\partial k(t)} = \alpha Ak(t)^{-(1-\alpha)}$$

- Por el teorema de Euler,

$$w(t) = y(t) - R(t)k(t) = (1-\alpha)Ak(t)^{\alpha}$$

- Alternativamente, en términos de la función de producción original de Cobb-Douglas,

$$\begin{aligned} R(t) &= \alpha A K(t)^{\alpha-1} L(t)^{1-\alpha} \\ &= \alpha A k(t)^{-(1-\alpha)} \end{aligned}$$

y similarmente, por $w(t) = f(k(t)) - k(t) f'(k(t))$

$$\begin{aligned} w(t) &= (1-\alpha) A K(t)^{\alpha} L(t)^{-\alpha} \\ &= (1-\alpha) A k(t)^{\alpha} \end{aligned}$$

lo que verifica el teorema de Euler en este caso.

El estado estacionario

- La representación per cápita de la función de producción agregada nos permite dividir ambos lados de la ley fundamental de movimiento del modelo de crecimiento de Solow entre L y obtener:

$$k(t+1) = sf(k(t)) + (1-\delta)k(t)$$

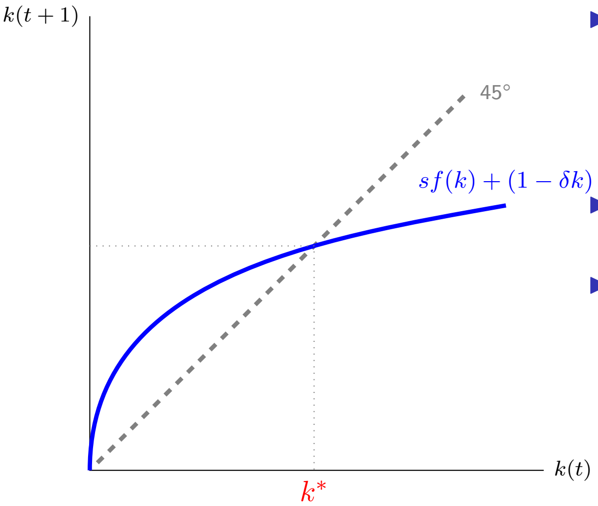
- Esta expresión también puede referirse como la ecuación en diferencia de equilibrio del modelo de Solow.
- Las otras cantidades de equilibrio se obtienen de la razón capital-trabajo $k(t)$.

Definición: Equilibrio de estado estacionario

Un equilibrio de estado estacionario sin cambio tecnológico ni crecimiento de la población es una senda de equilibrio para la cual $k(t) = k^*$ para todo periodo t.

- La economía tenderá a este equilibrio de estado estacionario con el tiempo (pero nunca lo alcanzará en tiempo finito).

Razón capital-trabajo de estado estacionario

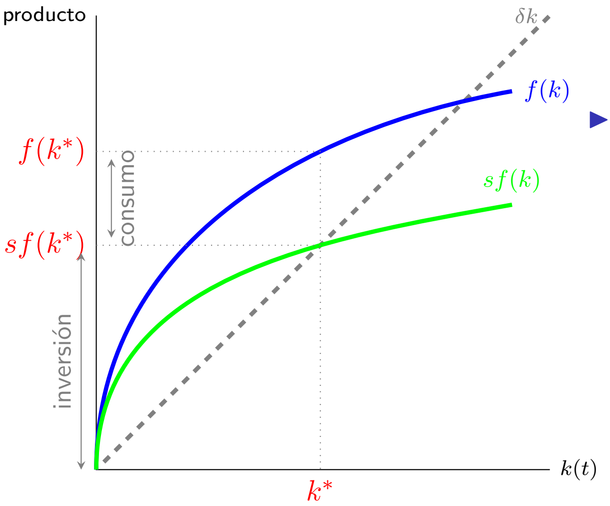


- Su intersección (positiva) da el valor de estado estacionario de k^*,

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s}$$

- Hay otra intersección en $k = 0$, porque asumimos que $f(0) = 0$
- La ignoraremos porque:
  1. Si el capital no es esencial, $f(0) > 0$ y $k = 0$ no sería equilibrio de estado estacionario
  2. Aunque existe, esta intersección es inestable
  3. No tiene ningún interés económico.

Consumo e inversión en el estado estacionario



- Representación visual alternativa del estado estacionario: intersección entre δk y la función $sf(k)$. Útil porque:
  1. Muestra los niveles de consumo e inversión en una misma figura.
  2. Enfatiza que el equilbrio de estado estacionario iguala la inversión, $sf(k)$, a la cantidad de capital que necesita ser *reemplazada*, δk.

Un único estado estacionario

Proposición

Considere el modelo básico de crecimiento de Solow, cuando se cumplen los Supuestos 1 y 2. Entonces existe un único equilibrio de estado estacionario donde la razón capital-trabajo $k^* \in (0, \infty)$ está dada por $\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s}$, la producción per cápita está dada por

$$y^* = f\left(k^*\right)$$

y el consumo per cápita está dado por

$$c^* = (1 - s) f\left(k^*\right)$$

Prueba

- La proposición dice que cualquier k^* que cumpla
$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s} \tag{⚖}$$
es un estado estacionario.
- Para demostrar existencia, note que del supuesto 2 (y la regla de L'Hospital), $\lim_{k\to 0}\frac{f(k)}{k} = \infty$ y $\lim_{k\to\infty}\frac{f(k)}{k} = 0$.
- Además, $\frac{f(k)}{k}$ es continua (por el supuesto 1), así que por el teorema del valor intermedio existe k^* tal que ⚖ se satisface.
- Para probar unicidad, diferenciamos $\frac{f(k)}{k}$ con respecto a k, y obtenemos
$$\frac{\partial\left[\frac{f(k)}{k}\right]}{\partial k} = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} = -\frac{w}{k^2} < 0$$
donde hemos sustituido $w = f(k) - kf'(k)$.
- Como $\frac{f(k)}{k}$ es estrictamente decreciente, solo puede existir un único valor k^* que cumpla ⚖.

Ejemplos de no-existencia y no-unicidad

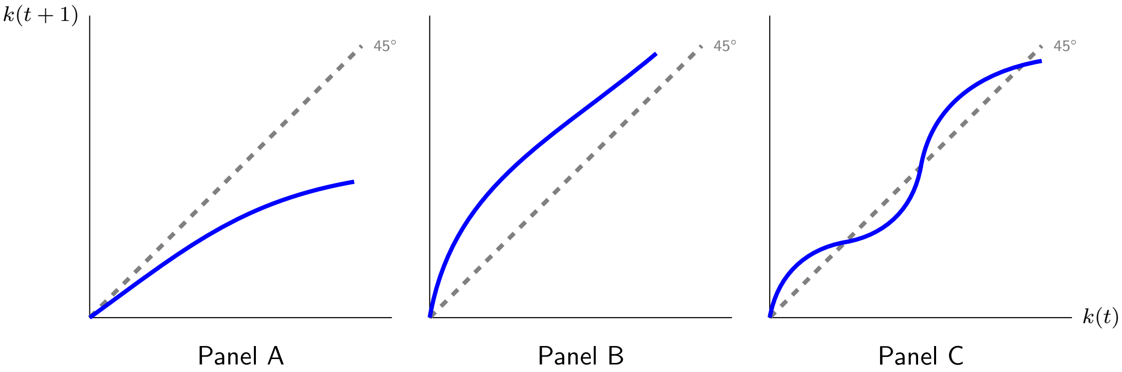


Figura: Ejemplos de cuando no existe un estado estacionario interior, o bien existen múltiples, porque no se cumplen los supuestos 1 y 2.

La "regla de oro"

- Es fácil hacer estática comparativo respecto a s, a y δ para k^* y y^*.
- Pero c^* no será monotónica respecto a s (piense, por ejemplo, en $s = 1$).
- De hecho, existe un nivel específico de la tasa de ahorro, s_{oro} conocida como la tasa de ahorro de la "regla de oro", que maximiza c^*.
- Pero no podemos afirmar que esa tasa de ahorro sea "mejor" que otra tasa de ahorro.
- Escribamos la relación de estado estacionario entre c^* y s, omitiendo los demás parámetros:

$$\begin{aligned} c^*(s) &= (1-s)f\left(k^*(s)\right) \\ &= f\left(k^*(s)\right) - \delta k^*(s) \end{aligned}$$

- La segunda igualdad se cumple porque en estado estacionario $sf(k) = \delta k$.

- Diferenciando con respecto a s,

$$\frac{\partial c^*(s)}{\partial s} = \left[f'\left(k^*(s)\right) - \delta\right] \frac{\partial k^*}{\partial s}$$

- s_{oro} es tal que $\frac{\partial c^*(s_{\text{oro}})}{\partial s} = 0$.
- El correspondiente stock de estado estacionario de la regla dorada se define como k^*_{oro}.

Proposición

En el modelo básico de crecimiento de Solow, el máximo nivel de consumo de estado estacionario se alcanza cuando la tasa de ahorro es s_{oro}, donde el nivel correspondiente de capital de estado estacionario k^*_{oro} cumple que

$$f'\left(k^*_{\text{oro}}\right) = \delta$$

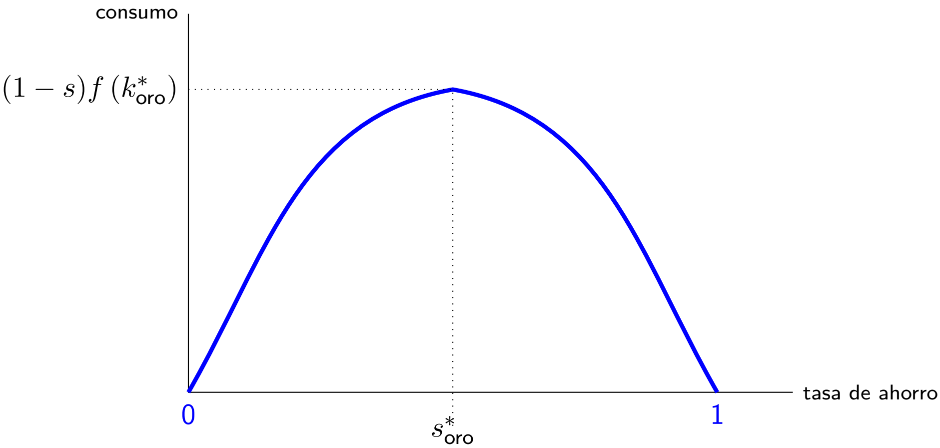


Figura: La tasa de ahorro de la regla de oro, la cual maximiza el consumo de estado estacionario

Ineficiencia dinámica

- Cuando la economía está por debajo de k^*_{oro}, un mayor ahorro aumentará el consumo.
- Cuando está por encima de k^*_{oro}, se puede aumentar el consumo de estado estacionario ahorrando menos.En este caso, la razón capital-trabajo es demasiado alta, por lo que los hogares están invirtiendo demasiado y consumiendo no lo suficiente (ineficiencia dinámica).
- Pero como no hay una función de utilidad, las afirmaciones acerca de "ineficiencia" deben considerarse con cautela.
- Tal ineficiencia dinámica no sucederá una vez que endogenicemos las decisiones de consumo-ahorro.

Resumen del modelo de Solow en tiempo discreto

- El stock de capital per cápita evoluciona como

$$k(t+1) = sf(k(t)) + (1-\delta)k(t)$$

- La razón capital-trabajo de estado estacionario k^* está dada por

$$\frac{f\left(k^*\right)}{k^*} = \frac{\delta}{s}$$

- El consumo está dado por

$$C(t) = (1-s)Y(t)$$

- Y los precios de los factores por

$$\begin{aligned} R(t) &= f'(k(t)) > 0 \text{ and} \\ w(t) &= f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) > 0. \end{aligned}$$

Dinámica de transición

- Senda de equilibrio: nos interesa la senda completa del stock de capital, la producción, el consumo, y los precios de los factores, no solamente sus valores de estado estacionario.
- En ingeniería y física, el equilibrio es un punto de descanso de un sistema dinámico, por eso *equilibrio de estado estacionario*.
- En economía, el comportamiento fuera del estado estacionario también está gobernado por el comportamiendo optimizador de los hogares y empresas, y por el equilibrio del mercado.
- Necesitamos estudiar la dinámica de transición de la ecuación en diferencia de equilibrio $k(t+1) = sf(k(t)) + (1-\delta)k(t)$ partiendo de un valor inicial arbitrario $k(0) > 0$.
- Preguntas clave:
  - ¿tenderá la economía al estado estacionario?
  - ¿cómo se comportará la economía a lo largo de la senda de transición?

Nota:

Estabilidad asintótica

Estabilidad asintótica de un sistema de ecuaciones en diferencia

- Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencia no lineales autónomas

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \tag{🐾}$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- Sea $\mathbf{x}^*$ un punto fijo de la correspondencia $\mathbf{G}(\cdot)$, es decir,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G}\left(\mathbf{x}^*\right)$$

- A veces a $\mathbf{x}^*$ se le refiere como el *punto de equilibrio* de 🐾.
- Nos referiremos a $\mathbf{x}^*$ como un punto estacionario o un estado estacionario de 🐾.

Definición: Estabilidad asintótica

Un estado estacionario $\mathbf{x}^*$ es estable asintóticamente (localmente) si existe un conjunto abierto $B\left(\mathbf{x}^*\right) \ni \mathbf{x}^*$ tal que para cualquier solución $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ de 🐾 con $\mathbf{x}(0) \in B\left(\mathbf{x}^*\right)$, tenemos que $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$. Además, $\mathbf{x}^*$ es estable asintóticamente globalmente si para todo $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, para cualquier solución $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^{\infty}$, tenemos que $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$

Estabilidad asintótica de una ecuación en $\mathbb{R}$

Algunos resultados sobre estabilidad

- Sean $x(t), a, b \in \mathbb{R}$, entonces el único estado estacionario de la ecuación en diferencia lineal
$$x(t+1) = ax(t) + b$$
es estable asintóticamente globalmente si $|a| < 1$. En este caso $x(t) \to x^* = \frac{b}{1-a}$.
- Supongamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el estado estacionario x^* definido por $g\left(x^*\right) = x^*$. Entonces, el estado estacionario x^* de la ecuación en diferencia no lineal
$$x(t+1) = g(x(t))$$
es estable asintóticamente localmente si $\left|g'\left(x^*\right)\right| < 1$. Además, si $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces x^* es estable asintóticamente globalmente.

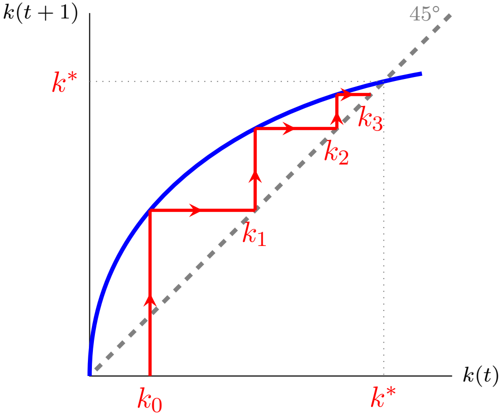
Dinámica de transición en el modelo de Solow de tiempo discreto

Proposición

Suponga que se cumplen los supuestos y . Entonces el equilibrio de estado estacionario del modelo de crecimiento de Solow descrito por la ecuación en diferencia

$$k(t+1) = sf(k(t)) + (1-\delta)k(t)$$

es estable asintóticamente globalmente, y $k(t)$ converge monotónicamente a k^* desde cualquier valor inicial $k(0) > 0$.



- Empezando con $k(0) < k^*$, la economía crece hacia k^*, acumulando capital y aumentando el ingreso per cápita.
- Si al inicio $k'(0) > k^*$, se alcanza el estado estacionario desacumulando capital y contrayendo la economía.

Proposición

Si se cumplen, , y $k(0) < k^*$, entonces $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ en una secuencia creciente y $\{R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ es una secuencia decreciente. Si $k(0) > k^*$, aplica el resultado opuesto.

Hasta ahora, el modelo de crecimiento de Solow tiene algunas propiedades útiles, pero no crecimiento, excepto cuando la economía empieza con $k(0) < k^*$.

2. El modelo de Solow en tiempo continuo

De ecuaciones en diferencia a ecuaciones diferenciales

- Empecemos con una simple ecuación en diferencia

$$x(t+1) - x(t) = g(x(t))$$

- Ahora consideremos la siguiente aproximación para cualquier $\Delta t \in [0, 1]$,

$$x(t + \Delta t) - x(t) \simeq \Delta t \cdot g(x(t))$$

- Cuando $\Delta t = 0$, esta ecuación es solamente una identidad. Cuando $\Delta t = 1$, volvemos a la ecuación original.
- En los casos intermedios es una aproximación lineal, no muy mala si $g(x) \simeq g(x(t))$ para todo $x \in [x(t), x(t+1)]$

De ecuaciones en diferencia a ecuaciones diferenciales (cont'n)

- Dividimos ambos lados de esta ecuación entre Δt, y tomamos el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t) \simeq g(x(t))$$

donde

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$$

- Esta es una ecuación diferencial que representa a la ecuación en diferencia original para el caso cuando la distancia entre t y $t+1$ es "pequeña".

> En resumen, la ecuación en diferencia $x(t+1) - x(t) = g(x(t))$ la aproximamos en tiempo continuo como $\dot{x}(t) = g(x(t))$.

La ecuación fundamental del modelo de Solow en tiempo continuo

- No hemos cambiado nada del lado de la producción, por lo que todavía los precios de los factores son

$$
\begin{aligned}
R(t) &= f'(k(t)) \\
w(t) &= f(k(t)) - k(t)f'(k(t))
\end{aligned}
$$

aunque ahora interpretados como tasas instantáneas.

- De nuevo el ahorro y el consumo son

$$
\begin{aligned}
S(t) &= sY(t) \\
C(t) &= (1-s)Y(t)
\end{aligned}
$$

- Introducimos ahora crecimiento (exponencial) de la población:

$$
L(t) = e^{nt}L(0)
$$

La ecuación fundamental del modelo de Solow en tiempo continuo (cont'n)

- Recordemos que $k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)}$, lo cual implica

$$\begin{aligned}\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} &= \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - n\end{aligned}$$

- En tiempo discreto el capital cumple $K(t+1) - K(t) = sY(t) - \delta K(t)$, entonces

$$\dot{K}(t) = sF[K(t), L(t), A(t)] - \delta K(t)$$

- Usando la definición de $k(t)$ y la propiedad de retornos constante de escala la función de producción,

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+\delta)k(t)$$

Definición: Senda de equilibrio del modelo de Solow en tiempo continuo

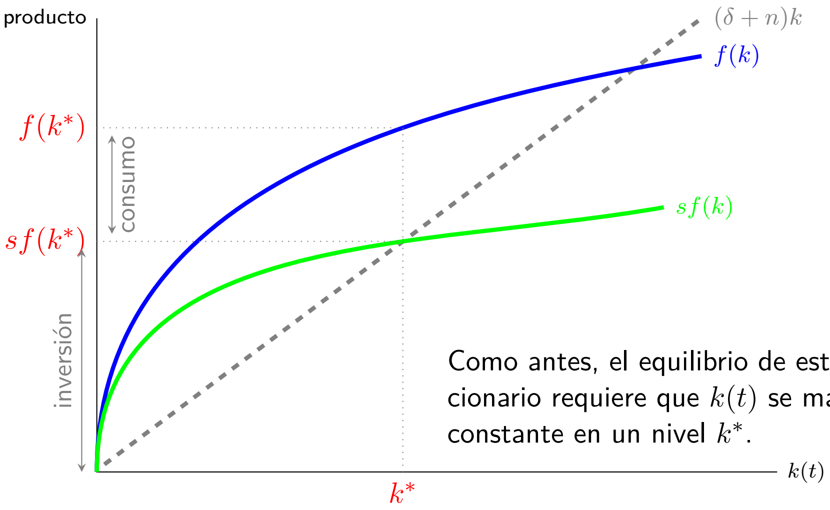
En el modelo básico de Solow en tiempo continuo con población creciendo a la tasa n, sin cambio tecnológico, y un stock inicial de capital $K(0)$, una senda de equilibrio es una secuencia de stocks de capital, trabajo, niveles de producción, niveles de consumo, tasas salariales y de alquiler de capital

$$\{K(t), L(t), Y(t), C(t), w(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$$

tal que

- el trabajo satisface $L(t) = e^{nt}L(0)$,
- el capital per cápita satisface $\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+\delta)k(t)$,
- el producto está dado por $Y(t) = F[K(t), L(t), A(t)]$,
- el consumo está dado por $C(t) = (1-s)Y(t)$,
- la tasa salarial está dada por $w(t) = F_L[K(t), L(t), A(t)]$
- y la tasa de alquiler de capital por $R(t) = F_K[K(t), L(t), A(t)]$.

Estado estacionario con crecimiento de la población



Como antes, el equilibrio de estado estacionario requiere que $k(t)$ se mantenga constante en un nivel k^*.

Figura: Inversión y consumo en el equilibrio de e.e. con crecimiento de la población.

Estado estacionario en el modelo de Solow con tiempo continuo

Proposición

Consideremos el modelo básico de Solow en tiempo continuo, en el que se cumplen los supuestos 1 y 2. Entonces la senda de equilibrio $\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+\delta)k(t)$ tiene un único estado estacionario donde la razón capital-trabajo $k^* \in (0, \infty)$ es igual a

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s},$$

el producto per cápita está dado por

$$y^* = f(k^*)$$

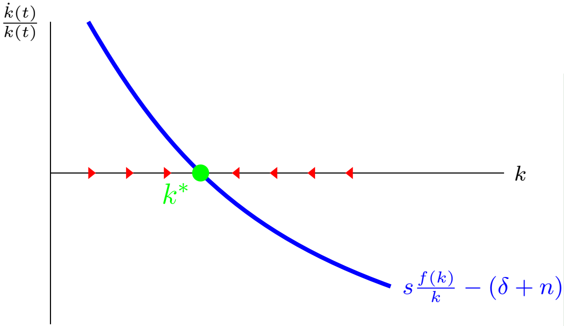
y el consumo per cápita es

$$c^* = (1-s)f(k^*)$$

- La estática comparativa es similar a la del modelo en tiempo discreto.

Resultado acerca de la estabilidad del modelo en tiempo continuo:

- Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y suponga que existe un único x^* tal que $g\left(x^*\right) = 0$. Además, suponga que $g(x) < 0$ para todo $x > x^*$ y $g(x) > 0$ para todo $x < x^*$. Entonces el estado estacionario de la ecuación diferencial no lineal $\dot{x}(t) = g(x(t)), \quad x^*$, es estable asintóticamente globalmente, es decir, empezando con cualquier $x(0)$ se cumple $x(t) \to x^*$.



Proposición

Si se cumplen los supuestos 1 y 2, entonces el modelo básico de crecimiento de Solow en tiempo continuo con crecimiento constante de la población y sin cambio tecnológico es estable asintóticamente globalmente, y partiendo de cualquier $k(0) > 0$,

$$k(t) \to k^*$$

- Vemos que cuando $k < k^*, \dot{k} > 0$ y cuando $k > k^*, \dot{k} < 0$, por lo que k converge monotónicamente a k^*.

3. Crecimiento sostenido

El modelo AK

- Cobb-Douglas mostraron que cuando α es cercano a 1, el ajuste al nivel de estado estacionario puede ser muy lento.
- El modelo más sencillo de crecimiento sostenido esencialmente toma $\alpha = 1$ en la función de producción Cobb-Douglas.
- Relajemos los supuestos 1 y 2 y asumamos por ahora que

$$F[K(t), L(t), A(t)] = AK(t)$$

  donde $A > 0$ es una constante.
- Conocido como el modelo "AK", en su forma más simple el producto ni siquiera depende del trabajo.
- Los resultados que nos gustaría resaltar también se cumplen con funciones de producción más generales de rendimientos constantes de escala,

$$F[K(t), L(t), A(t)] = AK(t) + BL(t)$$

El modelo AK (cont'n)

- Seguimos asumiendo que la tasa de crecimiento de la población es n.
- Si lo combinamos con la función de producción anterior,

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sA - \delta - n$$

- Por lo tanto, si $sA - \delta - n > 0$, habrá crecimiento sostenido en la razón capital-trabajo.
- Como la producción es proporcional a K, esto implica que también habrá crecimiento sostenido en el capital.

Proposición

Consideremos el modelo de Solow con función de producción $F[K(t), L(t), A(t)] = AK(t)$ y supongamos que $sA - \delta - n > 0$. Entonces en equilibrio hay crecimiento sostenido del producto per cápita a la tasa $sA - \delta - n$. En particular, partiendo de una razón capital-trabajo $k(0) > 0$, la economía tiene

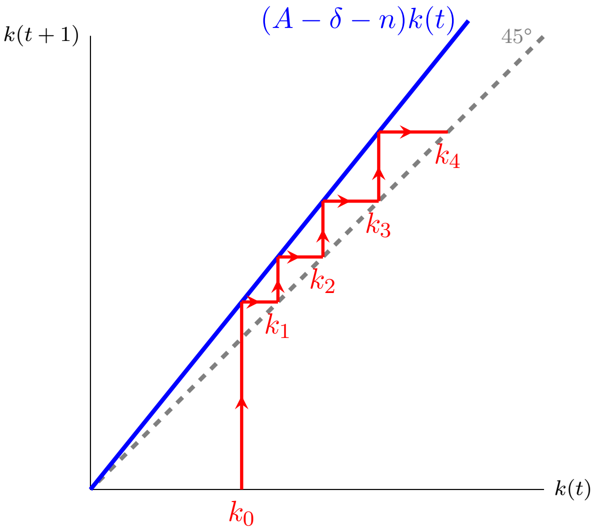
$$k(t) = \exp((sA - \delta - n)t)k(0)$$

y

$$y(t) = \exp((sA - \delta - n)t)Ak(0)$$

- Note la ausencia de dinámica de transición.

Crecimiento sostenido con la tecnología AK lineal y $sA - \delta - n > 0$



Limitaciones del modelo AK

1. Caso de "filo de navaja", requiere que la función de producción sea, en última instancia, lineal en el capital social.
2. Implica que a medida que pasa el tiempo, la proporción del ingreso nacional atribuida al capital aumentará hacia 1.
3. El progreso tecnológico parece ser un factor importante (quizás el más importante) para comprender el proceso de crecimiento económico.

Crecimiento balanceado

- La función de producción $F[K(t), L(t), A(t)]$ es muy general.
- Podría no tener crecimiento balanceado, i.e. una senda de la economía consistente con los hechos de Kaldor:
  - mientras que aumenta el producto per cápita, la razón capital-trabajo, la tasa de interés, y la distribución del ingreso entre capital y trabajo se mantienen relativamente constantes.
- Sabemos que la parte del capital en el ingreso nacional no es realmente constante (ha aumentado en los últimos ≈ 30 años). No obstante, fue relativamente constante por casi un siglo, por lo que nos quedaremos con los hechos de Kaldor.
- Más importante aún, el crecimiento balanceado es un punto de partida muy sencillo.

- Note que la participación del capital en el ingreso es cercano a $1/3$, mientras que la del trabajo es $2/3$.
- Ignoraremos la tierra, por no ser un factor de producción principal (pero en países pobres sí lo es).
- Por esto, los economistas usualmente escogen la función $AK^{1/3}L^{2/3}$.
- La principal ventaja es que el *crecimiento balanceado* es lo mismo que un estado estacionario de un modelo con variables transformadas
  - i.e., de nuevo obtendremos $\dot{k} = 0$, pero la definición de k será distinta.
- Pero es importante tener en mente que el crecimiento tiene características "no-balanceadas".
  - e.g., la participación de distintos sectores cambia sistemáticamente.

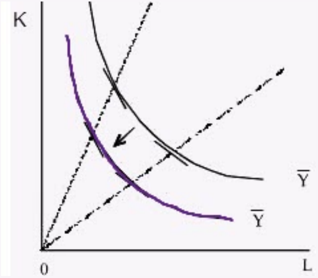
Tipos de cambio tecnológico neutral

Para una función $Y(t) = \tilde{F}[K(t), L(t), A(t)]$ de rendimientos constantes de escala

Neutral de Hicks

$$Y(t) = A(t)F[K(t), L(t)]$$

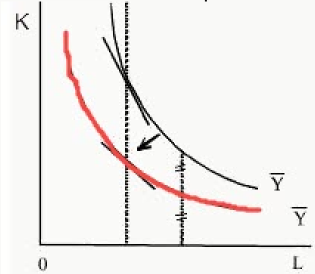
Las isocuantas mantienen su forma, cambian valores



Neutral de Solow

$$Y(t) = F[A(t)K(t), L(t)]$$

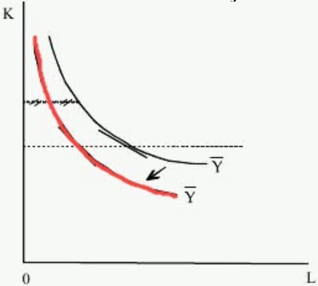
Aumenta el producto *como si* la economía tuviera más capital



Neutral de Harrod

$$Y(t) = F[K(t), A(t)L(t)]$$

Aumenta el producto *como si* la economía tuviera más trabajadores



Tipos de cambio tecnológico neutral

- Podríamos también especificar un vector de indíces de tecnología $\mathbf{A}(t) = (A_H(t), A_K(t), A_L(t))$ y una función de producción

$$\tilde{F}[K(t), L(t), \mathbf{A}(t)] = A_H(t) F\left[A_K(t)K(t), A_L(t)L(t)\right]$$

- Pero aún con esta restricción en la forma del progreso tecnológico, $A(t)$ podría modificar la función de producción entera.
- Para que haya crecimiento balanceado es necesario que todo cambio tecnológico sea neutral de Harrod (como si aumentara el trabajo).

Teoremas de Uzawa

- Nos enfocamos en modelos de tiempo continuo.
- Elementos clave para el crecimiento balanceado: que la razón capital trabajo, $K(t)/Y(t)$, y la participación de factores en el ingreso

$$\alpha_L(t) \equiv \frac{w(t)L(t)}{Y(t)} \qquad \text{y} \qquad \alpha_K(t) \equiv \frac{R(t)K(t)}{Y(t)}$$

  sean todos constates.
- Por el supuesto 1 y el teorema de Euler sabemos que $\alpha_L(t) + \alpha_K(t) = 1$.

Teorema Uzawa I

Suponga que

$$L(t) = e^{nt}L(0) \qquad Y(t) = \tilde{F}(K(t), L(t), \tilde{A}(t)) \qquad \dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t)$$

con $\tilde{F}$ es de rendimientos constantes de escala en K y L. Suponga que $\tau < \infty$,

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = g_Y > 0 \qquad \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = g_K > 0 \qquad \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = g_C > 0.$$

Entonces

1. $g_Y = g_K = g_C$; y
2. para cualquier $t \geq \tau$, $\tilde{F}$ puede representarse como

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}_+$, $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ es homogénea de grado 1, y

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g = g_Y - n$$

Intuición

- Por la restricción de recursos:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$
$$g_K \equiv \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\frac{Y(t)}{K(t)} - \delta$$

- Para que g_K sea constante, se requiere que $Y(t)$ crezca al mismo ritmo que $K(t)$, es decir, $g_Y = g_K$.
- El consumo es $C(t) = (1-s)Y(t)$, por lo tanto $g_C = g_Y$.

- Como la función de producción tiene rendimientos constante de escala:

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= A_H(t)F\left[A_K(t)K(t), A_L(t)L(t)\right] \\
\frac{Y(t)}{K(t)} &= A_H(t)F\left[A_K(t), \frac{A_L(t)L(t)}{K(t)}\right]
\end{aligned}
$$

- En crecimiento balanceado, la relación producto-trabajo es constante, entonces:
  - Normalizamos $A_H(t) = 1$
  - Normalizamos $A_K(t) = 1$
  - $\frac{A_L(t)L(t)}{K(t)}$ debe ser constante:

$$
\begin{aligned}
\log(A_L(t)) + \log(L(t)) - \log(K(t)) &= \text{constante} \\
\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} &= 0 \\
\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} &= g_K - n
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto, la función debe tomar la forma $Y(t) = F\left[K(t), A_L(t)L(t)\right]$

Implicaciones del teorema de Uzawa

Bajo los supuestos del teorema de Uzawa, después del tiempo τ el progreso tecnológico puede representarse como neutral de Harrod (es decir, como aumentando el trabajo).

- Destacable: este teorema se plantea y se prueba sin hacer referencia a comportamiento de equilibrio ni a mercados que aclaran.
- Además, note que se trata de un resultado asintótico: aplica después de alguna fecha τ.
- Pero el teorema no es tan general como parece: solo nos da una representación.

Teorema Uzawa II

Suponga que se cumplen todos los supuestos del teorema I de Uzawa, por lo que $\tilde{F}: \mathbb{R}^2_+ \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ tiene la forma $F(K(t), A(t)L(t))$ con $A(t) \in \mathbb{R}_+$ y $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g = g_Y - n$. Además, suponga que los mercados de factores son competitivos y que para todo $t \geq T$, el precio de renta satisface $R(t) = R^*$ (o equivalentemente, $\alpha_K(t) = \alpha^*_k$). Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{F}_K(K(t), L(t), \tilde{A}(t)) &= \quad F_K(K(t), A(t)L(t)) \\ \tilde{F}_L(K(t), L(t), \tilde{A}(t)) &= A(t)F_L(K(t), A(t)L(t)) \end{aligned} \tag{📎}$$

Además, si se cumple 📎 ; y los mercados de factores son competitivos, entonces $R(t) = R^*$ (y $\alpha_K(t) = \alpha^*_K$) para todo$t \geq T$.

Intuición

- Suponga que la función de producción es de la forma $Y = F[K, AL]$.
- La proporción del ingreso atribuido al capital es

$$\alpha_K(t) \equiv \frac{R(t)K(t)}{Y(t)}$$

asumiendo que el mercado es competitivo

$$= \frac{K(t)}{Y(t)} \frac{\partial F[K(t), A(t)L(t)]}{\partial K(t)}$$

como la productividad marginal es homogénea de grado cero

$$= \frac{K(t)}{Y(t)} \frac{\partial F\left[1, \frac{A(t)L(t)}{K(t)}\right]}{\partial K(t)}$$

las variables crecen según $g_Y = g_K = g + n \Rightarrow$, las fracciones son constantes

por lo tanto $\alpha_K(t) = \alpha_K^*$

Implicaciones para modelar el crecimiento

- No se requiere que $Y(t) = F[K(t), A(t)L(t)]$, solo que se pueda representar así.
- Permite una excepción importante: si

$$Y(t) = [A_K(t)K(t)]^{\alpha} [A_L(t)L(t)]^{1-\alpha}$$

entonces tanto $A_K(t)$ como $A_L(t)$ podrían crecer asintóticamente, manteniendo el crecimiento balanceado.
- Esto porque podemos definir $A(t) = [A_K(t)]^{\alpha/(1-\alpha)} A_L(t)$ y representar la función de producción como

$$Y(t) = [K(t)]^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha}$$

- La diferencia entre crecimiento neutral de Solow, Hicks y Harrod es relevante solo cuando la elasticidad de sustitución entre capital y trabajo no es igual a 1.

4. El modelo de crecimiento de Solow con progreso tecnológico

La producción y la acumulación de capital

- Por el teorema de Uzawa I, la función de producción debe tener la forma

$$Y(t) = F[K(t), A(t)L(t)]$$

- Además, suponemos que la tecnología y la población crecen

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g \qquad\qquad \frac{L(t)}{L(t)} = n$$

- De nuevo, la tasa de ahorro es constante, por lo que el capital se acumula como

$$\dot{K}(t) = sF[K(t), A(t)L(t)] - \delta K(t)$$

La razón capital - trabajo efectivo

- Ahora definimos $k(t)$ como la razón de capital a trabajo efectivo:

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$$

- Leve abuso de notación, pero útil.
- Diferenciando esta expresión con respecto al tiempo,

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n$$

- El producto por unidad de trabajo efectivo es

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} &= F\left[\frac{K(t)}{A(t)L(t)}, 1\right] \\ &\equiv f(k(t))\end{aligned}$$

El ingreso per cápita

- El ingreso per cápita es $y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)}$, es decir

$$\begin{aligned} y(t) &= A(t)\hat{y}(t) \\ &= A(t)f(k(t)) \end{aligned}$$

- Claramente si $\hat{y}(t)$ es constante, el ingreso per cápita, $y(t)$, crecerá con el tiempo, porque $A(t)$ está creciendo.
- Por ello no debemos buscar "estados estacionarios" donde el ingreso per cápita sea constante, sino sendas de crecimiento balanceado, donde el ingreso per cápita crece a una tasa constante.
- Algunas variables transformadas, tales como $\hat{y}(t)$ o $k(t)$ se mantienen constantes.
- Así, podemos pensar en sendas de crecimiento balanceado como estados estacionarios de un modelo transformado.
- A veces los términos "estado estacionario" y "senda de crecimiento balanceado" se usan intercambiablemente.

La ecuación de crecimiento, en términos de k

- Substituimos $\dot{K}(t) = sF[K(t), A(t)L(t)] - \delta K(t)$ en la ecuación de acumulación de capital:
$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sF[K(t), A(t)L(t)]}{K(t)} - (\delta + g + n)$$
- Como asumimos rendimientos constantes de escala
$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + g + n)$$
- Las únicas diferencias: (1) la presencia de g, y (2): k ya no es la razón capital-trabajo, ahora es la razón capital-trabajo *efectivo*.

La senda de crecimiento balanceado

Proposición

Considere el modelo básico de crecimiento de Solow en tiempo continuo, con progreso tecnológico Harrod-neutral a la tasa g y crecimiento de la población a la tasa n. Asumimos que se cumplen y . Entonces existe un único equilibrio de estado estacionario (senda de crecimiento balanceado) donde la razón capital-trabajo efectivo $k^* \in (0, \infty)$ está dada por

$$\frac{f\left(k^*\right)}{k^*} = \frac{\delta + g + n}{s}$$

El producto per cápita y el consumo crecen a la tasa g.

Interpretación

- La ecuación $sf(k^*) = (\delta + g + n)k^*$ enfatiza que ahora el ahorro total, $sf(k)$, se utiliza para la reposición del stock de capital por tres motivos distintos:
  1. la depreciación a la tasa δ.
  2. el crecimiento de la población a la tasa n, que reduce el capital por trabajador.
  3. El progreso tecnológico Harrod-neutral a la tasa g.
- Ahora la reposición de la razón capital-trabajo efectivo requiere que la inversión sea igual a $(\delta + g + n)k$.

Convergencia al estado estacionario

Proposición

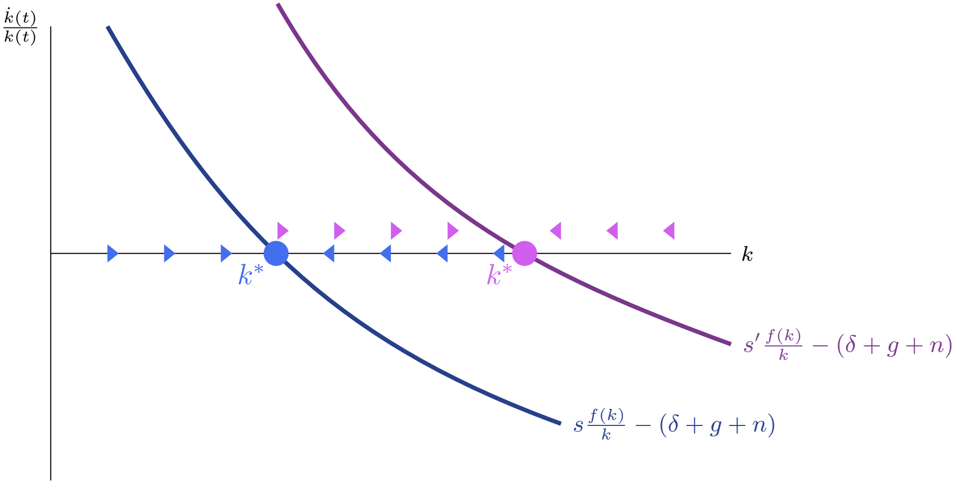
Supongamos que se cumplen y . Entonces el modelo de crecimiento de Solow en tiempo continuo con progreso tecnológico Harrod-neutral y crecimiento de la población es asintóticamente estable, es decir, partiendo de cualquier $k(0) > 0$, la razón de capital-trabajo efectivo converge a un valor de estado estacionario k^*:

$$k(t) \to k^*$$

- Ahora el modelo genera crecimiento en el producto per cápita, pero enteramente exógeno.

Dinámica comparativa

- Dinámica comparativa: respuesta dinámica de una economía a un cambio de sus parámetros o a perturbaciones.
- Diferente de estática comparativa, porque ahora nos interesa la senda completa de ajuste de la economía siguiendo el cambio del parámetro o la perturbación.
- Por brevedad, nos enfocamos en una economía de tiempo continuo.
- Recuerde que
$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + g + n)$$



Respuesta dinámica a un aumento en la tasa de ahorro de s a s'. Las flechas ▸ muestran la dinámica hacia el estado estacionario inicial, mientras que las flechas ▸ la dinámica hacia el nuevo estado estacionario.

Conclusiones

- Marco simple y manejable, que nos permite discutir la acumulación de capital y las implicaciones del progreso tecnológico.
- El modelo de Solow nos muestra que si no hay progreso tecnológico, y mientras no estemos en el mundo AK, no habrá crecimiento sostenido.
- Genera un crecimiento de la producción per cápita, pero solo exógenamente: el progreso tecnológico es una caja negra.
- acumulación de capital: determinada por la tasa de ahorro, la tasa de depreciación y la tasa de crecimiento de la población. Todos son exógenos.
- Necesitamos profundizar y comprender qué hay en estas cajas negras.

Referencias I

- Acemoglu, Daron (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press.
- Solow, Robert M. (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth". En: *The Quarterly Journal of Economics* 70.1 (Feb), págs. 65-94.
- Swan, Trevor W. (1956). "Economic Growth and Capital Accumulation". En: *Economic Record* 32.2, págs. 334-361.