El modelo de cambio tecnológico endógeno

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC3300 - Crecimiento Económico

II Semestre 2021

Última actualización: 25 de noviembre de 2021

Tabla de contenidos

1. Modelos de expansión de variedad

Introducción

- La clave para comprender la tecnología es que la investigación y desarrollo (I+D) y la adopción de tecnología son actividades con propósito.
- En esta clase estudiamos el cambio tecnológico y la I+D.
- Los modelos más simples de cambio tecnológico endógeno son aquellos en los que la I+D amplía la variedad de insumos o máquinas utilizadas en la producción (Romer, 1990).
- Modelos con expansión de la variedad de insumos:
  - la investigación conducirá a la creación de nuevas variedades de insumos (máquinas) y una mayor variedad de insumos aumentará la división del trabajo
  - innovación de proceso.
- Alternativa: innovación de productos (Grossman y Helpman (1991a,b)):
  - invención de nuevos bienes,
  - debido a la preferencia por la variedad, los ingresos ”reales” aumentan

Ideas clave

- Innovación como generación de nuevos diseños o ideas para la producción.
- Tres características importantes (Romer):
  1. Ideas y tecnologías que son no-rivales: muchas empresas pueden beneficiarse de la misma idea.
  2. Rendimientos crecientes a escala —retornos constantes a escala de capital, trabajo, material, etc. y luego también se producen ideas y diseños.
  3. Costos de I+D pagados como costos fijos por adelantado.
- Debemos considerar modelos de competencia monopolística, donde las empresas que innovan se convierten en monopolistas y obtienen ganancias.
- A lo largo de este tema utilizaremos la estructura de elasticidad constante Dixit-Stiglitz.

2. El modelo de equipo de laboratorio

El modelo de equipo de laboratorio con variedad de insumos

- Todo lo que se requiere para la investigación es inversión en equipos o en laboratorios.
- Es decir, se crean nuevas máquinas e ideas utilizando el bien final.
  - en lugar del empleo de científicos o trabajadores calificados o no calificados.
  - similar a la economía AK de Rebelo.
  - referencia útil, ya que minimiza el alcance de la difusión y las externalidades.

Demografía, preferencias y tecnología

- Economía de horizonte infinito, tiempo continuo.
- Hogar representativo con preferencias:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \, \mathrm{d}t$$

- $L =$ población total (constante) de trabajadores. Mano de obra suministrada de manera inelástica.
- El hogar representativo posee una cartera equilibrada de todas las empresas de la economía.

- Bien de consumo único, producido con función de producción agregada:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta}\left[\int_0^{N(t)} x(v,t)^{1-\beta}\,\mathrm{d}v\right] L^\beta$$

donde
  - $N(t) =$ número de variedades de insumos (máquinas) en el momento t,
  - $x(v,t) =$ cantidad de insumo (máquina) tipo v usado en el momento t.
- Los x se deprecian completamente después de su uso.
- Pueden interpretarse como insumos genéricos, bienes intermedios, máquinas o capital.
- Por tanto, las máquinas **no** son variables de estado adicionales.
- Para $N(t)$ dados, que los productores de bienes finales toman como dado, la función de producción agregada presenta rendimientos constantes a escala.

- Los productores de bienes finales son competitivos.
- La restricción de recursos de la economía en el momento t es

$$C(t) + X(t) + Z(t) \leq Y(t)$$

  donde $X(t)$ es la inversión en insumos en el momento t y $Z(t)$ es el gasto en I+D en el momento t.
- Una vez que se inventa el diseño de un insumo en particular, la empresa de investigación puede crear una unidad de esa máquina a un costo marginal igual a $\psi > 0$ unidades del bien final.

Frontera de posibilidades de innovación y patentes

- Frontera de posibilidades de innovación:

$$\dot{N}(t) = \eta Z(t),$$

  donde $\eta > 0$, y la economía comienza con algún $N(0) > 0$.
- Hay libre entrada a la investigación: cualquier individuo o empresa puede gastar una unidad del bien final en el momento t para generar un flujo η de los diseños de nuevas máquinas.
- La empresa que descubre estos diseños recibe una patente perpetua respetada sobre esta máquina.
- No hay incertidumbre agregada en el proceso de innovación: Habrá incertidumbre a nivel de la empresa individual, pero con muchos laboratorios de investigación diferentes que realizan tales gastos, a nivel agregado, la ecuación de arriba se mantiene de manera determinística.

- Una empresa que inventa una nueva variedad de máquina v es el único proveedor de ese tipo de máquina y establece un precio $p^x(v,t)$ en el momento t para maximizar las ganancias.
- Dado que las máquinas se deprecian después de su uso, $p^x(v,t)$ también se puede interpretar como un "precio de alquiler" o el costo de usuario de esta máquina.

- Maximización por parte de los productores finales:

$$\max_{[x(v,t)]_{v\in[0,N(t)]},L} \frac{1}{1-\beta}\left[\int_0^{N(t)} x(v,t)^{1-\beta}\ \mathrm{d}v\right] L^{\beta} - \int_0^{N(t)} p^x(v,t)x(v,t)\ \mathrm{d}v - w(t)L$$

- La demanda de máquinas es isoelástica:

$$x(v,t) = p^x(v,t)^{-1/\beta}L$$

- Solo depende del costo de uso de la máquina y de la oferta de trabajo de equilibrio, pero no de la tasa de interés $r(t)$, la tasa salarial $w(t)$ o el número total de máquinas disponibles $N(t)$.

Maximización de ganancias por parte de los monopolistas tecnológicos

- Consideremos el problema de un monopolista que posee el diseño de una máquina de tipo v inventada en el momento t.
- Dado que el hogar representativo tiene una cartera equilibrada de todas las empresas, no hay incertidumbre en los dividendos y el objetivo de cada monopolista es maximizar las ganancias esperadas.

El monopolista elige un plan de inversión a partir del momento t para maximizar el valor descontado de las ganancias:

$$V(\nu, t) = \int_t^\infty \exp\left[-\int_t^s r(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right] \pi(\upsilon, s)\ \mathrm{d}s$$

donde

- $\pi(\nu, t) \equiv p^x(\nu, t)x(\nu, t) - \psi x(\nu, t)$ denota las ganancias del monopolista que produce el insumo υ en t,
- $x(\nu, t)$ y $p^x(\nu, t)$ son las opciones que maximizan las ganancias,
- $r(t)$ es la tasa de interés de mercado en el momento t.

- Para referencia futura, el valor descontado de las ganancias también se puede escribir en la forma alternativa de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$r(t)V(v,t) - \dot{V}(v,t) = \pi(v,t)$$

- Esta ecuación muestra que el valor descontado de las ganancias puede cambiar por dos razones:
  1. Las ganancias cambian con el tiempo
  2. La tasa de interés de mercado cambia con el tiempo.

Caracterización del equilibrio

Una asignación en esta economía se define mediante trayectorias temporales de:

- niveles de consumo, gasto agregado en máquinas y gasto agregado en I+D

$$[C(t), X(t), Z(t)]_{t=0}^{\infty}$$

- tipos de máquinas disponibles,

$$[N(t)]_{t=0}^{\infty}$$

- precios y cantidades de cada máquina y el valor actual neto descontado de las ganancias de esa máquina,

$$[p^x(v,t), x(v,t), V(v,t)]_{v\in N(t), t=0}^{\infty}\text{, y}$$

- tasas de interés y salarios,

$$[r(t), w(t)]_{t=0}^{\infty}.$$

Un equilibrio es una asignación en la que

- todas las empresas de investigación eligen $[p^x(v,t), x(v,t)]_{v\in[0,N(t)],t=0}^{\infty}$ para maximizar las ganancias,
- $[N(t)]_{t=0}^{\infty}$ está determinado por la entrada gratuita,
- $[r(t), w(t)]_{t=0}^{\infty}$, son consistentes con el equilibrio del mercado y
- $[C(t), X(t), Z(t)]_{t=0}^{\infty}$ son consistentes con la optimización del consumidor.

- Dado que las demandas por insumos son isoelásticas, la solución al problema de maximización de cualquier monopolista $v \in [0, N(t)]$ implica fijar el mismo precio en cada período:

$$p^x(\nu, t) = \frac{\psi}{1-\beta} \qquad \text{para todo } v \text{ y } t$$

- Normalizamos $\psi \equiv (1-\beta)$, de modo que

$$p^x(\nu, t) = p^x = 1 \qquad \text{para todo } v \text{ y } t$$

- La maximización de ganancias también implica que cada monopolista alquila la misma cantidad de máquinas en cada período, igual a

$$x(v, t) = L \qquad \text{para todo } v \text{ y } t$$

- Ganancias del monopolio:

$$\pi(\nu, t) = \beta L \qquad \text{para todo } v \text{ y } t$$

- Sustituyendo $x(v,t) = L$ en la función de producción agregada se obtiene:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} N(t) L$$

- Aunque la función de producción agregada exhibe rendimientos constantes de escala desde el punto de vista de las empresas de bienes finales (que toman $N(t)$ como $dados$), hay rendimientos crecientes de escala para toda la economía;
- Un aumento en $N(t)$ aumenta la productividad del trabajo y cuando $N(t)$ aumenta a una tasa constante, también lo hará la producción per cápita.

- Salarios de equilibrio:

$$w(t) = \frac{\beta}{1-\beta} N(t)$$

- Condiciones de holgura de la entrada libre en I+D

$$\eta V(\nu, t) \leq 1 \qquad Z(\nu, t) \geq 0 \qquad [\eta V(\nu, t) - 1]\, Z(\nu, t) = 0, \quad \text{para todo} v \text{ y } t$$

donde $V(v, t)$ lo definimos anteriormente como el valor del monopolista.

- Para valores de parámetros relevantes con entrada positiva y crecimiento económico:

$$\eta V(v, t) = 1$$

- Finalmente, el problema del hogar representativo es estándar e implica la ecuación de Euler habitual:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho)$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp\left(-\int_0^t r(s)\ \mathrm{d}s\right) N(t)V(t)\right] = 0$$

Senda de crecimiento balanceado

- Definimos una senda de crecimiento balanceado (BGP) como una senda de equilibrio donde $C(t), X(t), Z(t)$ y $N(t)$ crecen a una tasa constante.
- Dicho equilibrio se puede denominar alternativamente como "estado estacionario", ya que es un estado estacionario en variables transformadas.

- Una senda de crecimiento balanceado requiere que el consumo crezca a una tasa constante, digamos g_C.
- Dado que $\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho)$, esto solo es posible si

$$r(t) = r^* \qquad \text{para todo } t$$

- Dado que las ganancias en cada fecha vienen dadas por $\pi(\nu, t) = \beta L$ y dado que la tasa de interés es constante, $\dot{V}(t) = 0$ y por la ecuación de HJB

$$V^* = \frac{\beta L}{r^*}$$

- Supongamos a continuación que la condición de libre entrada se cumple como la igualdad $\eta V(v,t)=1$, en cuyo caso también tenemos

$$\frac{\eta\beta L}{r^*}=1$$

- Esta ecuación fija la tasa de interés de estado estable, r^*, como:

$$r^*=\eta\beta L$$

- La ecuación de Euler del consumidor implica entonces que la tasa de crecimiento del consumo debe estar dada por

$$g_C^*=\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=\frac{1}{\theta}\left(r^*-\rho\right)$$

- En la senda de crecimiento balanceado, el consumo crece al mismo ritmo que la producción total
$$g^* = g_C^*$$
- Por lo tanto, dado r^*, la tasa de crecimiento a largo plazo de la economía es:
$$g^* = \frac{1}{\theta}(\eta\beta L - \rho)$$
- Suponemos que
$$\eta\beta L > \rho \qquad\qquad (1-\theta)\eta\beta L < \rho$$
lo que asegurará que $g^* > 0$ y que se cumpla la condición de transversalidad.

Proposición

Suponga que se cumplen las condiciones $\eta\beta L > \rho$ y $(1-\theta)\eta\beta L < \rho$. Entonces, en el modelo de expansión de la variedad de insumos descrito anteriormente, existe una senda de crecimiento balanceado única en la que la tecnología, la producción y el consumo crecen a la misma tasa, g^*, dada por

$$g^* = \frac{1}{\theta}(\eta\beta L - \rho)$$

- Una característica importante de los modelos de esta clase es la presencia del efecto de escala: cuanto mayor es L, mayor es la tasa de crecimiento.

Dinámica de transición

- No hay dinámicas de transición en este modelo.
- Sustituyendo las ganancias en la función de valor para cada monopolista, tenemos

$$r(t)V(v,t) - \dot{V}(v,t) = \beta L$$

- La observación clave es que el crecimiento positivo en cualquier punto implica que $\eta V(v,t) = 1$ para todo t.
- En otras palabras, si $\eta V(v,t') = 1$ para algún t' entonces $\eta V(\nu,t) = 1$ para todos los t.
- Entonces al diferenciar $\eta V(v,t) = 1$ con respecto al tiempo, se obtiene $\dot{V}(v,t) = 0$, que solo es consistente con $r(t) = r^*$ para todo t, por lo tanto

$$r(t) = \eta\beta L \qquad \text{para todo } t$$

Proposición

Suponga que se cumplen las condiciones $\eta\beta L > \rho$ y $(1-\theta)\eta\beta L < \rho$. Entonces, en el modelo de expansión de la variedad de insumos descrito anteriormente, con stock de tecnología inicial $N(0) > 0$, existe una única senda de equilibrio en la que la tecnología, la producción y el consumo siempre crecen a la tasa g^*.

- Si bien los microfundamentos aquí son muy diferentes de la economía neoclásica AK, la estructura matemática es muy similar al modelo AK (como lo ilustra más claramente la ecuación obtenida para la producción, $Y(t) = \frac{1}{1-\beta}N(t)L$).
- En consecuencia, como en el modelo AK, la economía siempre crece a una tasa constante.
- Pero la economía es muy diferente.

3. Asignaciones óptimas de Pareto

Problema del planificador social

- La competencia monopolística implica que el equilibrio competitivo no es necesariamente óptimo de Pareto.
- El modelo exhibe una versión de las externalidades de la demanda agregada:
  1. Existe un margen sobre el costo marginal de producción de los insumos.
  2. El número de insumos producidos en cualquier momento puede no ser el óptimo.

- Dado $N(t)$, el planificador social elegirá

$$\max_{[x(v,t)]_{v\in[0,N(t)]},L} \frac{1}{1-\beta}\left[\int_0^{N(t)} x(v,t)^{1-\beta}\,\mathrm{d}v\right]L^{\beta} - \int_0^{N(t)} \psi x(v,t)\,\mathrm{d}v$$

- Difiere del problema del equilibrio de maximización de ganancias porque el costo marginal de la creación de la máquina, ψ, se usa como el costo de las máquinas en lugar del precio de monopolio, y el costo de la mano de obra no se resta.
- Recordando que $\psi \equiv 1-\beta$, la solución a este programa implica

$$x^S(v,t) = (1-\beta)^{-1/\beta} L$$

- El nivel *neto* de producción (después de restar los costos de inversión) es

$$\begin{aligned} Y^S(t) &= \frac{(1-\beta)^{-(1-\beta)/\beta}}{1-\beta} N^S(t)L \\ &= (1-\beta)^{-1/\beta} N^S(t)L \end{aligned}$$

- Por lo tanto, el problema de maximización del planificador social puede escribirse

$$\max \int_0^\infty \frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} \exp(-\rho t)\ \mathrm{d}t$$

sujeto a

$$\dot{N}(t) = \eta(1-\beta)^{-1/\beta}\beta N(t)L - \eta C(t)$$

donde $(1-\beta)^{-1/\beta}\beta N^S(t)L$ es la producción neta.

- En este problema, $N(t)$ es la variable de estado y $C(t)$ es la variable de control.
- La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es:

$$\rho V(N) = \max_{C} \left\{ \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + V'(N) \underbrace{\Big[\eta(1-\beta)^{-1/\beta}\beta N L - \eta C\Big]}_{\dot{N}} \right\}$$

- En el óptimo, debe cumplirse que:

$$\frac{\dot{C}^S(t)}{C^S(t)} = \frac{1}{\theta}\left((1-\beta)^{-1/\beta}\eta\beta L - \rho\right)$$

Comparación del crecimiento del equilibrio descentralizado y del planificador

- La comparación con la tasa de crecimiento en el equilibrio descentralizado se reduce a la de

$$(1-\beta)^{-1/\beta} \qquad \text{con} \quad 1$$

- La economía socialmente planificada siempre crecerá más rápido que la economía descentralizada: la primera es siempre mayor ya que $(1-\beta)^{-1/\beta} > 1$ debido a que $\beta \in (0,1)$

Proposición

En el modelo de expansión de la variedad de insumos descrito anteriormente, el equilibrio descentralizado es siempre subóptimo de Pareto.

Comenzando con cualquier $N(0) > 0$, la asignación óptima de Pareto implica una tasa de crecimiento constante

$$g^S = \frac{1}{\theta}\left((1-\beta)^{-1/\beta}\eta\beta L - \rho\right)$$

que es estrictamente mayor que la tasa de crecimiento de equilibrio

$$g^* = \frac{1}{\theta}(\eta\beta L - \rho)$$

¿Por qué el equilibrio crece más lentamente que la asignación óptima?

- Porque el planificador social valora más la innovación
- El planificador social es capaz de utilizar las máquinas de forma más intensiva después de la innovación, porque hay una externalidad pecuniaria resultante de los márgenes del monopolio.
- Otros modelos de progreso tecnológico endógeno que estudiaremos en este curso incorporan difusión tecnológica y, por lo tanto, generan ineficiencias tanto por la externalidad pecuniaria aislada aquí como por la difusión tecnológica estándar.

4. Política en modelos de progreso tecnológico endógeno

¿Qué tipo de políticas pueden aumentar la tasa de crecimiento de equilibrio?

1. Subsidios a la investigación: el gobierno puede aumentar la tasa de crecimiento de la economía, y esto puede ser una mejora de Pareto si los impuestos no distorsionan y puede haber una redistribución adecuada de los recursos para que todas las partes se beneficien.
2. Subsidios a los insumos de capital: las ineficiencias también surgen del hecho de que la economía descentralizada no está utilizando tantas unidades de las máquinas / insumos de capital (debido al margen del monopolio); por lo que los subsidios a los insumos de capital otorgados a los productores de bienes finales también aumentarían la tasa de crecimiento.

- Pero notemos que las mismas políticas también se pueden utilizar para distorsionar las asignaciones.
- Cuando miramos una muestra representativa de países, los impuestos sobre la investigación y los insumos de capital son más comunes que los subsidios.

Los efectos de la competencia

- Recuerdemos que el precio de monopolio es:

$$p^x = \frac{\psi}{1-\beta}$$

- Imaginemos, en cambio, que un grupo de empresas competitivas puede copiar la innovación de cualquier monopolista.
- Pero en lugar de un costo marginal ψ, el grupo tiene un costo marginal de $\gamma\psi$ con $\gamma > 1$
- Si $\gamma > 1/(1-\beta)$, no hay amenaza desde el margen.
- Si $\gamma < 1/(1-\beta)$, el margen obligaría al monopolista a establecer un "precio límite",

$$p^x = \gamma\psi$$

- ¿Por qué?:
  - Si $p^x > \gamma\psi$, el grupo podría rebajar el precio del monopolista, hacerse cargo del mercado y obtener ganancias positivas.
  - Si $p^x < \gamma\psi$, el monopolista podría aumentar el precio y obtener más ganancias.
  - Por tanto, existe un precio de equilibrio único dado por $p^x = \gamma\psi$.
- Ganancias por debajo del precio límite:

$$\text{ganancias por unidad} = (\gamma - 1)\psi = (\gamma - 1)(1 - \beta) < \beta,$$

- Por tanto, crecimiento con competencia:

$$\hat{g} = \frac{1}{\theta}\left(\eta\gamma^{-1/\beta}(\gamma - 1)(1 - \beta)^{-(1-\beta)/\beta}L - \rho\right) < g^*$$

5. Crecimiento con difusión de conocimiento

Crecimiento con difusión de conocimientos

- En el modelo de variedades de insumos, el crecimiento se debió al uso del bien final para I+D.
- Esto es similar al modelo de crecimiento endógeno de Rebelo (1991), ya que la ecuación de acumulación es lineal en factores acumulables. En equilibrio, la producción tomó una forma lineal en el acervo de conocimiento (nuevas máquinas), por lo tanto, una forma AN en lugar de la forma AK de Rebelo.
- Una alternativa es utilizar "factores escasos" en I+D: tenemos a los científicos como creadores clave de la I+D.
- Con esta alternativa, no puede haber crecimiento endógeno a menos que exista difusión de conocimiento de I+D pasados, haciendo que los factores escasos utilizados en I+D sean cada vez más productivos con el tiempo.

Frontera de posibilidades de innovación

- La frontera de posibilidades de innovación en este caso es:

$$\dot{N}(t) = \eta N(t) L_R(t)$$

  donde $L_R(t)$ es el trabajo asignado a I+D en el momento t.
- El término $N(t)$ en el lado derecho captura la difusión del stock de ideas existentes.
- Nótese que esta ecuación impone que esta difusión es proporcional o lineal. Esta linealidad será la fuente de crecimiento endógeno en el modelo actual.
- $L_R(t)$ sale de la fuerza laboral regular. El costo de los trabajadores para el sector de la investigación viene dado por la tasa salarial en el sector de bienes finales.

Caracterización del equilibrio

- La mayor parte de la caracterización del equilibrio muy similar al modelo anterior.
- Equilibrio del mercado laboral:

$$L_R(t) + L_E(t) \leq L$$

- Producto agregado de la economía:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} N(t) L_E(t)$$

- Las ganancias de los monopolistas por vender sus máquinas es

$$\pi(t) = \beta L_E(t)$$

- El valor actual neto descontado de un monopolista (para un diseño v) todavía está dado por (usando el nuevo flujo de ganacias):

$$V(\nu, t) = \int_t^\infty \exp\left[-\int_t^s r(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right] \pi(v, s)\ \mathrm{d}s$$

- La condición de entrada libre ya no es la misma; la nueva ecuación de acumulación de variedades implica:

$$\eta N(t) V(v,t) = w(t)$$

  donde $N(t)$ está en el lado izquierdo porque parametriza la productividad de un trabajador de I+D, mientras que el flujo de costo de realizar una investigación es contratar trabajadores para I+D, por lo tanto, es igual a la tasa salarial $w(t)$.
- El salario de equilibrio debe ser el mismo que antes:

$$w(t) = \beta N(t)/(1-\beta)$$

- El crecimiento equilibrado nuevamente requiere que la tasa de interés sea constante en algún nivel r^*.

- Utilizando lo anterior junto con la condición de entrada libre, obtenemos:

$$\eta N(t)\frac{\beta L_E(t)}{r^*} = \frac{\beta}{1-\beta}N(t)$$

- Por tanto, la tasa de interés de equilibrio BGP debe ser

$$r^* = (1-\beta)\eta L_E^*$$

donde $L_E^* = L - L_R^*$.
- El hecho de que el número de trabajadores en producción debe ser constante en la senda de equilibrio balanceado se deduce de la ecuación de arriba.
- Ahora usando la ecuación de Euler del hogar representativo, para todo t:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} &= \frac{1}{\theta}\left((1-\beta)\eta L_E^* - \rho\right)\\ &\equiv g^*\end{aligned}$$

- Para completar la caracterización del equilibrio balanceado, necesitamos determinar L_E^*.
- En el equilibrio balanceado BGP, la ecuación de acumulación de variedades implica que la tasa de progreso tecnológico satisface

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \eta L_R^* = \eta \left(L - L_E^*\right)$$

- Esto implica que el nivel de empleo de equilibrio es

$$L_E^* = \frac{\theta\eta L + \rho}{(1-\beta)\eta + \theta\eta}$$

Resumen del equilibrio en el modelo con desbordamiento del conocimiento

Proposición

Consideremos el modelo de expansión de variedades de insumos descrito anteriormente con difusión de conocimiento y supongamos que

$$(1-\theta)(1-\beta)\eta L_E^* < \rho < (1-\beta)\eta L_E^*$$

donde L_E^* es el número de trabajadores empleados en la producción en la SCB en equilibrio. Entonces existe una SCB única en la que la tecnología, la producción y el consumo crecen al mismo ritmo,

$$g^* = \frac{1}{\theta}\left((1-\beta)\eta L_E^* - \rho\right)$$

a partir de cualquier nivel inicial de stock tecnológico $N(0) > 0$.

- Como en el modelo de variedades anterior, la asignación de equilibrio es subóptima de Pareto.

6. Crecimiento sin efectos de escala

Crecimiento sin efectos de escala: motivación

- Los modelos hasta ahora presentan un efecto de escala.
- Una población L más grande $\implies$ tasa de interés más alta y una tasa de crecimiento más alta.
- Potencialmente problemático por tres razones:
    1. Los países más grandes no necesariamente crecen más rápido.
    2. La población de la mayoría de las naciones no ha sido constante. Si tenemos un crecimiento de la población como en el modelo de crecimiento neoclásico estándar, por ejemplo, $L(t) = \exp(nt)L(0)$, estos modelos no presentaría un crecimiento equilibrado, sino que la tasa de crecimiento de la economía aumentaría con el tiempo.
    3. En los datos, la cantidad total de recursos dedicados a I+D parece aumentar de manera constante, pero no hay un aumento asociado en la tasa de crecimiento agregada.

Modelo de difusión de conocimientos, con dos diferencias

Diferencias:

1. Crecimiento de la población a una tasa exponencial $n, L(t) = nL(t)$.
   Hogar representativo, también creciendo a razón de n, con preferencias:

$$\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}\,\mathrm{d}t$$

2. El sector de I+D solo admite difusión limitada de conocimiento:

$$\dot{N}(t) = \eta N(t)^\phi L_R(t)$$

   donde $\phi < 1$ y $L_R(t)$ es el trabajo asignado a actividades de I+D en el momento t. El equilibrio del del mercado laboral requiere

$$L_E(t) + L_R(t) = L(t)$$

Crecimiento sin efectos de escala

- La producción y las ganancias agregadas están dadas por

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} N(t) L_E(t) \qquad \pi(t) = \beta L_E(t)$$

como en la sección anterior. Un equilibrio también se define de manera similar.

- Pensemos en la SEB. Entrada libre con igualdad:

$$\eta N(t)^{\phi} \frac{\beta L_E(t)}{r^* - n} = w(t)$$

- Como antes, el salario de equilibrio está determinado por el lado de la producción como

$$w(t) = \frac{\beta}{1-\beta} N(t)$$

- Por lo tanto,

$$\eta N(t)^{\phi - 1} \frac{(1-\beta) L_E(t)}{r^* - n} = 1$$

- Diferenciando esta condición con respecto al tiempo, obtenemos

$$(\phi - 1)\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + \frac{\dot{L}_E(t)}{L_E(t)} = 0$$

- Dado que en la SCB, la fracción de trabajadores asignados a la investigación es constante, debemos tener

$$\frac{\dot{L}_E(t)}{L_E(t)} = n$$

- Por lo tanto,

$$g_N^* \equiv \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{n}{1-\phi}$$

$$g_C^* = g_N^* = \frac{n}{1-\phi}$$

Resumen de equilibrio sin efectos de escala

Proposición

En el modelo de variedad de insumos en expansión descrito anteriormente con difusión limitada de conocimiento $\dot{N}(t) = \eta N(t)^{\phi} L_R(t)$, a partir de cualquier nivel inicial de existencias de tecnología $N(0) > 0$, existe una ruta de crecimiento equilibrada única en la que , la tecnología y el consumo per cápita crecen a la tasa $g_N^* = \frac{n}{1-\phi}$, y la producción crece a la tasa $g_N^* + n$.

- Es posible una SCB del ingreso per cápita con una población en crecimiento.
- En lugar de la difusión lineal, solo una cantidad limitada de difusión.
- Sin el crecimiento de la población, estos efectos secundarios afectarían el nivel de producción, pero no lo suficiente para sostener el crecimiento a largo plazo.
- El crecimiento de la población aumenta el tamaño del mercado de nuevas tecnologías de manera constante y genera un crecimiento a partir de estos efectos secundarios limitados.

Discusión

- ¿De verdad tenemos un modelo de "crecimiento sin efectos de escala"?: Hay dos sentidos en los que todavía existen efectos de escala:
  1. Una tasa de crecimiento de la población más rápida se traduce en una tasa de crecimiento de equilibrio más alta.
  2. Un tamaño de población más grande conduce a una producción per cápita más alta.
- Este es un modelo de "crecimiento semi-endógeno", porque el crecimiento está determinado únicamente por el crecimiento de la población y la tecnología, y no responde a las políticas.
- Es posible extender el modelo para permitir el impacto de la política y el crecimiento (aunque bajo supuestos algo restrictivos).

Referencias I