# Rendimientos crecientes y crecimiento


Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr


EC3300 - Crecimiento Económico

II Semestre 2021

Última actualización: 4 de noviembre de 2021

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

# Tabla de contenidos

# 1. El modelo de crecimiento de Romer (1986)

# Introducción

- El modelo de crecimiento de Solow (y todas las extensiones que hemos considerado en este curso) tiene la propiedad de que las políticas de ahorro / inversión no pueden afectar permanentemente la tasa de crecimiento económico.
- Esto se debe a que lo que aumenta la productividad del trabajo (la acumulación de capital físico) involucra rendimientos decrecientes de escala.
- Dado este supuesto, conforme se acumula más capital, su producto marginal cae: esto hace cada vez menos atractivo para los hogares adquirir más capital.
- Como este proceso se refuerza con el tiempo, el aumento temporal en el crecimiento de la productividad que inicialmente acompaña a un aumento en el ahorro eventualmente desaparece.

# Construyendo modelos con crecimiento endógeno

- La única forma en que podemos tener un modelo que evita esta predicción es cambiando nuestro supuesto sobre el proceso de producción.
- Necesitamos construir un modelo en el que haya un factor artificial de producción que no implique rendimientos decrecientes.
- El candidato obvio es el ”conocimiento”.
- No parece haber una razón convincente por la que debemos asumir que cuanto más conocimiento tenemos, menos valioso se vuelve más conocimiento.
- Por lo tanto, para tener una teoría del crecimiento endógeno de la productividad, construimos modelos que implican rendimientos constantes o crecientes a escala en el proceso de producción.

# El modelo de Romer

- Romer (1986) relanzó la literatura sobre crecimiento con un artículo que presentaba un modelo de rendimientos crecientes en el que había una tasa de crecimiento de equilibrio positivo estable que resultaba de la acumulación endógena de conocimiento.
- Esta fue una ruptura importante con la literatura existente, en la que el progreso tecnológico se había tratado en gran medida como completamente exógeno.

# Producción y acumulación de capital individual

- En el modelo de Romer, la función de producción de la empresa es de la forma

$$y_{t,j} = F\left(k_{t,j}, Z_t \ell_{t,j}\right)$$

  donde el progreso tecnológico agregado que aumenta la mano de obra es capturado por $Z_t$.
- El capital de la empresa $j$ se acumula sin depreciación,

$$\dot{k}_{t,j} = \dot{i}_{t,j}$$

# Inversión y capital agregados

- Las empresas y los individuos se distribuyen a lo largo del intervalo unitario con una masa total de 1 (y, lo que es más importante, no hay crecimiento de la población).
- Por lo tanto, la inversión agregada es, por ejemplo,

$$I_t = \int_0^1 i_{t,j} \, \mathrm{d}j$$

- Romer asume que el acervo agregado de conocimiento en la economía es proporcional a la suma acumulada de la inversión agregada pasada

$$\Xi_t = \int_{-\infty}^t I_v \, \mathrm{d}v$$

- que, no por casualidad, es idéntico al tamaño del stock de capital agregado,

$$K_t = \int_{-\infty}^t I_v \, \mathrm{d}v$$

# "Aprender haciendo" o "learnig by doing"

- Romer hace el supuesto crucial de que el efecto del acervo de conocimiento determina la productividad a través de

$$Z_t = \Xi_t^{\eta}$$

  donde $\eta < 1$.

- Por lo tanto, suprimiendo el subíndice $t$, la función de producción Cobb-Douglas a nivel de empresa se puede escribir

$$y_i = k_i^{\alpha} \ell_i^{1-\alpha} \Xi^{\eta}$$

  que es de rendimientos constante de escala a nivel de empresa en $(k, \ell)$ manteniendo el conocimiento agregado $\Xi$ fijo.

# Producción agregada

- La producción agregada es
$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \Xi^{\eta}$$
- Dividiendo por el tamaño de la fuerza laboral $L$ (o, de manera equivalente, normalizando a $L = 1$), tenemos
$$y = k^{\alpha} \Xi^{\eta}$$

# Consumo individual

- Ahora supongamos que los hogares maximizan una función de utilidad CRRA típica
$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_{t,j})\ \mathrm{d}t = \max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c_{t,j}^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\ \mathrm{d}t$$
- Pero cada hogar ignora el efecto trivial que su propia decisión de inversión tiene sobre el conocimiento agregado.
- Por lo tanto, desde la perspectiva de la empresa / consumidor individual, el producto marginal del capital es
$$\alpha k_{t,j}^{\alpha-1} \ell_{t,j}^{1-\alpha} \Xi_t^n$$

# Consumo individual

- Si normalizamos el modelo asumiendo que cada individuo está dotado con una unidad de trabajo $\ell_{t,j} = 1$, podemos establecer y resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\rho V(k_j) = \max_{c_j} \left\{ \frac{c_j^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + V'(k_j) \left[ \underbrace{k_j^{\alpha} \ell_j^{1-\alpha} \Xi^{\eta}}_{= y_j} - c_j \right] \right\}$$

- obtenemos la ecuación de Euler

$$\frac{\dot{c}_{t,j}}{c_{t,j}} = \tfrac{1}{\theta} \left( \alpha k_{t,j}^{\alpha-1} \Xi_t^{\eta} - \rho \right)$$

# Consumo agregado

- Pero si todos los hogares son idénticos y $\Xi_t = K_t$, esto significa que el consumo agregado per cápita evoluciona según

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}_t}{c_t} &= \tfrac{1}{\theta}\left(\alpha k_t^{\alpha-1}\Xi_t^{\eta} - \rho\right) \\ &= \tfrac{1}{\theta}\left(\alpha k_t^{\alpha+\eta-1} - \rho\right).\end{aligned}$$

# Crecimiento balanceado

- Una senda de crecimiento balanceado puede ocurrir en esta economía si $\alpha + \eta = 1$, en cuyo caso
$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \tfrac{1}{\theta}(\alpha - \rho)$$
de modo que hay un crecimiento constante para siempre a un ritmo que depende del grado de impaciencia y de la participación del capital en la producción.

# La solución del planificador social

- Por último, vemos que el problema del planificador social es

$$\rho V(k) = \max_c \left\{ \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + V'(k) \left[ \underbrace{k^\alpha \ell^{1-\alpha} \Xi^\eta}_{=y} - c \right] \right\}$$
$$= \max_c \left\{ \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + V'(k) \left[ k^{\alpha+\eta} \ell^{1-\alpha} - c \right] \right\}$$

porque el planificador social tomaría en cuenta el hecho de que las externalidades implican que hay mayores retornos a la acumulación de capital a nivel social que a nivel individual.

# La solución del planificador social

- Por lo que la tasa de crecimiento de estado estacionario que elegiría el planificador social es
$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \tfrac{1}{\theta}(\alpha + \eta - \rho)$$
- Así, este modelo implica que la acumulación de capital debe ser subsidiada si el planificador social quiere inducir a la economía privada a avanzar hacia el óptimo social.

# Referencias I

Romer, Paul M. (1986). “Increasing Returns and Long-Run Growth”. En: *Journal of Political Economy* 94.5, págs. 1002-1037.