El modelo de generaciones traslapadas

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC3300 - Crecimiento Económico
II Semestre 2021
Última actualización: 4 de noviembre de 2021

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. Crecimiento con generaciones traslapadas

Limitaciones de modelos con hogar representativo

- En muchas situaciones, el supuesto de un hogar representativo no es apropiado porque
  1. los hogares no tienen un horizonte de planificación infinito
  2. nuevos hogares llegan (o nacen) con el tiempo.
- Nuevas interacciones económicas: las decisiones que tomen las ”generaciones” mayores afectarán los precios a los que se enfrentan las ”generaciones” más jóvenes.

Crecimiento con generaciones traslapadas

Los modelos de generaciones traslapadas:

1. Capturan la interacción potencial de diferentes generaciones de individuos en el mercado;
2. Proporcionan una alternativa manejable a los modelos de agentes representativos de horizonte infinito;
3. Tienen algunas implicaciones clave diferentes a las del modelo de crecimiento neoclásico;
4. Tienen una dinámica (en algunos casos especiales) bastante similar al modelo de Solow (más que al modelo neoclásico);
5. Generan nuevas intuiciones acerca del papel de la deuda nacional y la seguridad social en la economía.

Problemas de modelos con horizonte infinito

- Economía estática con un número infinito de hogares, $i \in \mathbb{N}$
- Número infinito de productos básicos, $j \in \mathbb{N}$.
- Todos los hogares se comportan de manera competitiva
- El hogar i tiene preferencias:
$$u_i = c_i^i + c_{i+1}^i$$
- c_j^i denota el consumo del j-ésimo tipo de producto por el hogar i.
- Vector de dotación ω de la economía: cada hogar tiene una unidad de dotación del bien con el mismo índice que su índice.
- Fijamos el precio del primer producto básico como numerario, es decir, $p_0 = 1$.

Proposición

En la economía descrita anteriormente, el vector de precios $\bar{p}$ tal que $\bar{p}_j = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ es un precio de equilibrio competitivo vector e induce un equilibrio sin comercio, denotado por $\bar{x}$.

Prueba

- En $\bar{p}$, cada hogar tiene un ingreso igual a 1.
- Por lo tanto, la restricción presupuestaria del hogar i se puede escribir como

$$c_i^i + c_{i+1}^i \leq 1$$

- Esto implica que consumir la dotación propia es óptimo para cada hogar,
- Así, $\bar{p}$ y la asignación $\bar{x}$ sin ningún comercio, constituyen un equilibrio competitivo.

Sin embargo, este equilibrio competitivo no es óptimo de Pareto. Consideremos la asignación alternativa, $\tilde{x}$:

- El hogar $i = 0$ consume su propia dotación y la del hogar 1.
- Todos los demás hogares, indexados $i > 0$, consumen la dotación de un hogar vecino, $i + 1$.
- Todos los hogares con $i > 0$ están tan bien como en el equilibrio competitivo $(\bar{p}, \bar{x})$.
- El individuo $i = 0$ es estrictamente mejor.

Proposición

En la economía descrita anteriormente, el equilibrio competitivo en $(\bar{p}, \bar{x})$ no es óptimo de Pareto.

- La fuente del problema debe estar relacionada con el número infinito de mercancías.
- La versión extendida del Primer Teorema del Bienestar cubre un número infinito de bienes, pero solo asumiendo $\sum_{j=0}^{\infty} p_i^* \omega_j < \infty$ (escrito con la dotación agregada ω_j).
- Aquí la única dotación es trabajo, y por lo tanto $p_j^* = 1$ para todos $j \in \mathbb{N}$, de modo que $\sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j = \infty$ (¿por qué?).
- Esta economía abstracta es "isomórfica" al modelo de generaciones traslapadas de referencia.
- La subóptimalidad de Pareto en esta economía será la fuente de posibles ineficiencias en el modelo de generaciones traslapadas.

- El segundo teorema del bienestar no asumió $\sum_{j=0}^{\infty} p_i^* \omega_j < \infty$.
- En su lugar, utilizó la convexidad de preferencias, conjuntos de consumo y conjuntos de posibilidades de producción.
- Esta economía de cambio tiene preferencias convexas y conjuntos de consumo convexos:
- El óptimo de Pareto debe ser descentralizable mediante alguna redistribución de dotaciones.

Proposición

En la economía descrita anteriormente, existe una reasignación del vector de dotación ω a $\tilde{\omega}$, y un equilibrio competitivo asociado $(\bar{p}, \tilde{x})$ que es el óptimo de Pareto donde $\tilde{x}$ es como se describe arriba, y $\bar{p}$ es tal que $\bar{p}_j = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Prueba de la proposición

- Considere la siguiente reasignación de ω: la dotación del hogar $i \geq 1$ se otorga al hogar $i-1$.
- En el nuevo vector de dotación $\tilde{\omega}$, el hogar $i=0$ tiene una unidad del bien $j=0$ y una unidad del bien $j=1$
- Otros hogares i tienen una unidad del bien $i+1$.
- En el vector de precios $\bar{p}$, el hogar 0 tiene un presupuesto establecido

$$c_0^0 + c_1^1 \leq 2$$

  por lo tanto, elige $c_0^0 = c_1^0 = 1$
- Todos los demás hogares tienen conjuntos presupuestarios dados por

$$c_i^i + c_{i+1}^i \leq 1$$

- Por lo tanto, es óptimo para cada hogar $i > 0$ consumir una unidad del bien c_{i+1}^i
- Por tanto, $\tilde{x}$ es un equilibrio competitivo.

2. El modelo base de generaciones traslapadas

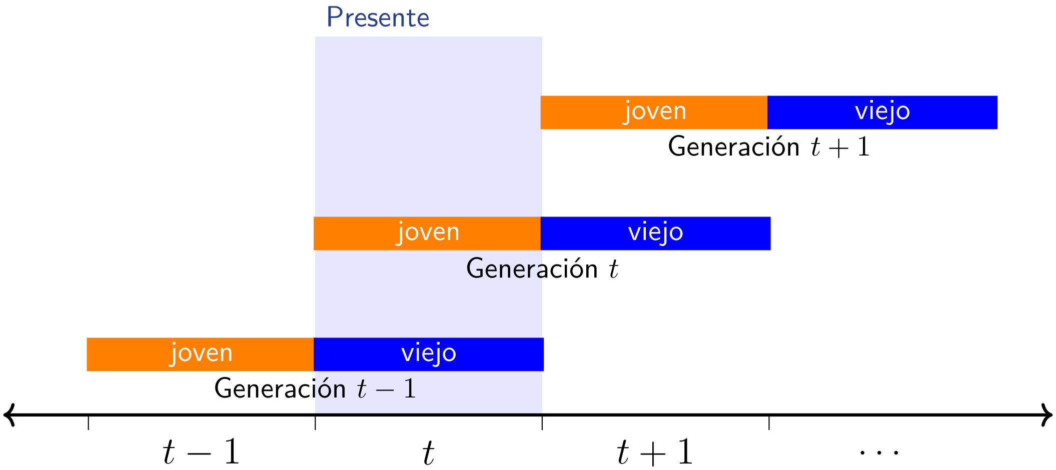
El modelo base de generaciones traslapadas

- El tiempo es discreto y va hasta el infinito.
- Cada individuo vive sólo dos períodos.
- Las personas nacidas en t viven en los periodos t y $t+1$.
- Suponga una función de utilidad general (separable) para individuos nacidos en t,

$$U(t) = \underbrace{u\left(c_1(t)\right)}_{\text{joven}} + \beta \underbrace{u\left(c_2(t+1)\right)}_{\text{viejo}}$$

- $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisface los supuestos habituales sobre la utilidad.
- $c_1(t)$: consumo del individuo nacido en t cuando es joven (en el periodo t).
- $c_2(t+1)$: consumo en la vejez (en el periodo $t+1$).
- $\beta \in (0,1)$ es el factor de descuento.

Las generaciones traslapadas



Demografía, preferencias y tecnología

- Crecimiento poblacional exponencial,

$$L(t) = (1+n)^t L(0)$$

- Lado de producción igual que antes: empresas competitivas, función de producción agregada con rendimientos constantes a escala (satisface los Supuestos 1 y 2):

$$Y(t) = F(K(t), L(t))$$

- Los mercados de factores son competitivos.
- Los individuos solo pueden trabajar en el primer período y proporcionar una unidad de trabajo de manera inelástica, ganando $w(t)$.

- Suponga que la depreciación es completa: $\delta = 1$.
- $k \equiv K/L$, $f(k) \equiv F(k, 1)$, y la tasa de rendimiento (bruta) del ahorro, que es igual a la tasa de alquiler del capital, es

$$1 + r(t) = R(t) = f'(k(t))$$

- Como de costumbre, el salario es

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t))$$

Decisiones de consumo

- El ahorro de un individuo de generación t, $s(t)$, se determina como una solución a

$$\max_{c_1(t), c_2(t+1), s(t)} u\left(c_1(t)\right) + \beta u\left(c_2(t+1)\right)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} c_1(t) + s(t) &\leq w(t) \\ c_2(t+1) &\leq R(t+1)s(t) \end{aligned}$$

- Las personas mayores alquilan sus ahorros de tiempo t como capital a las empresas en el momento $t+1$, y reciben la tasa de rendimiento bruta $R(t+1) = 1 + r(t+1)$
- La segunda restricción incorpora la noción de que los individuos solo gastan dinero en su propio consumo al final de la vida (sin altruismo o motivo de herencia).

- No es necesario introducir $s(t) \geq 0$, ya que los ahorros negativos violarían la restricción presupuestaria del segundo período (dado $c_2(t+1) \geq 0$).
- Dado que $u(\cdot)$ es estrictamente creciente, ambas restricciones se mantendrán como igualdades.
- Así, la condición de primer orden para un máximo se puede escribir en la forma familiar de la ecuación de Euler de consumo,

$$u'\left(c_1(t)\right) = \beta R(t+1) u'\left(c_2(t+1)\right).$$

- El problema de cada individuo es estrictamente cóncavo, por lo que esta ecuación de Euler es suficiente.
- Si despejáramos el consumo, y por tanto el ahorro, tendríamos

$$s(t) = s(w(t), R(t+1))$$

- $s : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en su primer argumento y puede aumentar o disminuir en su segundo argumento.
- El ahorro total en la economía será igual a

$$S(t) = s(t)L(t)$$

- $L(t)$ denota el tamaño de la generación t, que está ahorrando para poder consumir en $t + 1$.
- Dado que el capital se deprecia completamente después de su uso y todos los nuevos ahorros se invierten en capital,

$$K(t + 1) = L(t)s(w(t), R(t + 1))$$

Definición: Equilibrio competitivo

Un equilibrio competitivo puede representarse mediante una secuencia de stocks de capital agregados, consumo individual y precios de los factores, $\{K(t), c_1(t), c_2(t), R(t), w(t)\}_{t=0}^{\infty}$, de manera que la secuencia de precios de factores $\{R(t), w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ viene dada por

$$R(t) = f'(k(t)) \qquad\qquad w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)),$$

las decisiones de consumo individuales $\{c_1(t), c_2(t)\}_{t=0}^{\infty}$ están dadas por

$$u'\left(c_1(t)\right) = \beta R(t+1)u'\left(c_2(t+1)\right) \qquad\qquad s(t) = s(w(t), R(t+1)),$$

y el capital social agregado, $\{K(t)\}_{t=0}^{\infty}$, evoluciona de acuerdo con

$$K(t+1) = L(t)s(w(t), R(t+1))$$

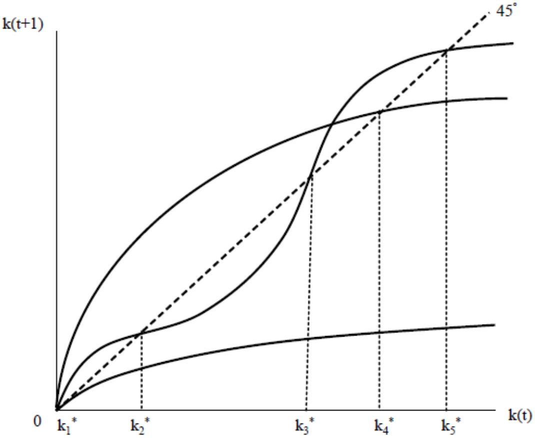
- Equilibrio en estado estacionario definido como de costumbre: un equilibrio en el que $k \equiv K/L$ es constante.
- Para caracterizar el equilibrio, divida la ecuación de acumulación por $L(t+1) = (1+n)L(t)$

$$k(t+1) = \frac{s(w(t), R(t+1))}{1+n}$$

- Ahora sustituyendo $R(t+1) = f'(k(t+1))$ y $w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t))$, obtenemos la

ley fundamental de movimiento de la economía de generaciones traslapadas

$$k(t+1) = \frac{s\left[f(k(t)) - k(t)f'(k(t)), f'(k(t+1))\right]}{1+n}$$



Posibles patrones:
Dado que la función de ahorro $s(\cdot,\cdot)$ puede tomar cualquier forma, esta ecuación en diferencia

$$k' = \frac{s\left[f(k) - kf'(k), f'(k')\right]}{1+n}$$

puede conducir a una dinámica bastante complicada y son posibles múltiples estados estacionarios.

- Un estado estable viene dado por una solución a esta ecuación tal que $k(t+1) = k(t) = k^*$, es decir,

$$k^* = \frac{s\left(f\left(k^*\right) - k^* f'\left(k^*\right), f'\left(k^*\right)\right)}{1+n}$$

Casos particulares de las funciones de producción y utilidad

- Suponga que las funciones de utilidad toman la forma familiar CRRA:

$$U(t) = \frac{c_1(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta\left(\frac{c_2(t+1)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right)$$

donde $\theta > 0$ y $\beta \in (0,1)$.

- La tecnología es Cobb-Douglas,

$$f(k) = k^{\alpha}$$

- El resto del entorno es como se describió anteriormente.
- La utilidad CRRA simplifica la condición de primer orden para la optimización del consumidor,

$$\frac{c_2(t+1)}{c_1(t)} = (\beta R(t+1))^{1/\theta}$$

- Esta ecuación de Euler puede expresarse alternativamente en términos de ahorro (sustituyendo las restricciones presupuestarias):

$$s(t)^{-\theta}\beta R(t+1)^{1-\theta} = (w(t) - s(t))^{-\theta}$$

- Despejando el ahorro encontramos:

$$s(t) = \frac{w(t)}{\psi(t+1)}$$

donde

$$\psi(t+1) \equiv \left[1 + \beta^{-1/\theta} R(t+1)^{-(1-\theta)/\theta}\right] > 1$$

- Esto afirma que los ahorros son siempre menores que los ingresos (laborales).

- El impacto de los precios de los factores en el ahorro se resume en los siguientes y derivados:

$$s_w \equiv \frac{\partial s(t)}{\partial w(t)} = \frac{1}{\psi(t+1)} \in (0,1)$$
$$s_R \equiv \frac{\partial s(t)}{\partial R(t+1)} = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) (\beta R(t+1))^{-1/\theta} \frac{s(t)}{\psi(t+1)}$$

- Dado que $\psi(t+1) > 1$, también tenemos ese $0 < s_w < 1$.
- Además, en este caso $s_R > 0$ if $\theta < 1, s_R < 0$ if $\theta > 1$, y $s_R = 0$ if $\theta = 1$
- Refleja las influencias que contrarrestan los efectos de ingreso y sustitución. Los efectos de sustitución ganan cuando $\theta < 1$, y pierden cuando $\theta > 1$
- El caso de $\theta = 1$ (preferencias logarítmicas) es de especial importancia, ya que los efectos de ingreso y sustitución se cancelan exactamente.

- La ecuación de movimiento de la economía de generaciones traslapadas implica

$$\begin{aligned} k(t+1) &= \frac{s(t)}{(1+n)} \\ &= \frac{w(t)}{(1+n)\psi(t+1)} \end{aligned}$$

- O más explícitamente,

$$k(t+1) = \frac{f(k(t)) - k(t)f'(k(t))}{(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta}f'(k(t+1))^{-(1-\theta)/\theta}\right]}$$

- El estado estacionario se obtiene entonces como una solución a la siguiente ecuación:

$$k^* = \frac{f\left(k^*\right) - k^* f'\left(k^*\right)}{(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta}f'\left(k^*\right)^{-(1-\theta)/\theta}\right]}$$

- Asumiendo una producción Cobb-Douglas, la dinámica del modelo está descrita por

$$k(t+1)=\frac{(1-\alpha)k(t)^{\alpha}}{(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta}\left(\alpha k(t+1)^{\alpha-1}\right)^{-(1-\theta)/\theta}\right]}$$

- mientras que el estado estacionario es la solución de

$$(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta}\left(\alpha\left(k^{*}\right)^{\alpha-1}\right)^{(\theta-1)/\theta}\right]=(1-\alpha)\left(k^{*}\right)^{\alpha-1}$$

- Para simplificar, defina $R^{*}\equiv\alpha\left(k^{*}\right)^{\alpha-1}$ como el producto marginal del capital en estado estacionario, en cuyo caso, esta ecuación se puede reescribir como

$$(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta}\left(R^{*}\right)^{(\theta-1)/\theta}\right]=\frac{1-\alpha}{\alpha}R^{*}$$

- El valor en estado estacionario de R^{*}, y por lo tanto k^{*}, ahora se puede determinar a partir de esta última ecuación, que siempre tiene una solución única.

Proposición

En el modelo de generaciones traslapadas con hogares que viven dos períodos, la tecnología Cobb-Douglas y las preferencias de CRRA, existe un equilibrio de estado estable único con la relación capital-trabajo k^* dada por

$$(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta}\left(\alpha\left(k^*\right)^{\alpha-1}\right)^{(\theta-1)/\theta}\right]=(1-\alpha)\left(k^*\right)^{\alpha-1}.$$

Este equilibrio de estado estacionario es globalmente estable para todo $k(0)>0$

- En este caso particular (de buen comportamiento), la dinámica del equilibrio es muy similar al modelo básico de Solow.

3. El modelo canónico de generaciones traslapadas

El modelo canónico

- Incluso el modelo con la utilidad CRRA y la función de producción Cobb-Douglas es relativamente complicado.
- Muchas de las aplicaciones usan preferencias logaritmicas $(\theta = 1)$.
- Los efectos ingreso y sustitución se cancelan exactamente entre sí: los cambios en la tasa de interés (y por lo tanto en la razón capital-trabajo de la economía) no tienen ningún efecto sobre la tasa de ahorro.
- La estructura del equilibrio es esencialmente idéntica al modelo básico de Solow.
- La utilidad del hogar de la generación t es,

$$U(t) = \log c_1(t) + \beta \log c_2(t+1)$$

- $\beta \in (0, 1)$ (aunque se podría permitir $\beta \geq 1$).
- Nuevamente $f(k) = k^\alpha$.

- Ecuación de Euler de consumo:

$$\frac{c_2(t+1)}{c_1(t)} = \beta R(t+1)$$

- Los ahorros deben satisfacer la ecuación

$$s(t) = \frac{\beta}{1+\beta} w(t)$$

- Tasa de ahorro constante, igual a $\beta/(1+\beta)$, de los ingresos laborales de cada individuo.

- Combinando esto con la ley fundamental de movimiento de la economía de generaciones traslapadas,

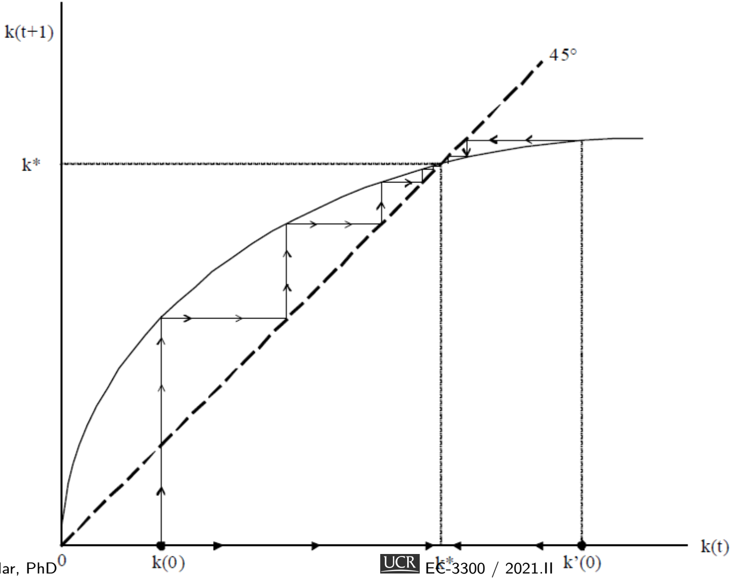
$$
\begin{aligned}
k(t+1) &= \frac{s(t)}{(1+n)} \\
&= \frac{\beta w(t)}{(1+n)(1+\beta)} && \text{(tasa de ahorro constante)} \\
&= \frac{\beta(1-\alpha)[k(t)]^{\alpha}}{(1+n)(1+\beta)}, && \text{(mecado laboral competitivo)}
\end{aligned}
$$

- Existe un estado estable único con

$$
k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}
$$

- Las dinámicas de equilibrio son idénticas a las del modelo básico de Solow y convergen monótonamente a k^*.

Dinámica de equilibrio en el modelo canónico de generaciones traslapadas



Proposición

En el modelo canónico de generaciones traslapadas con preferencias logarítmicas y tecnología Cobb-Douglas, existe un estado estable único, con una relación capital-trabajo k^* dada por

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Comenzando con cualquier $k(0) \in (0, k^*)$, la dinámica de equilibrio es tal que $k(t) \uparrow k^*$, y comenzando con cualquier $k'(0) > k^*$, la dinámica de equilibrio involucra $k(t) \downarrow k^*$.

4. Sobreacumulación

Sobreacumulación

- Comparamos ahora el equilibrio de generaciones traslapadas con la elección de un planificador social que desee maximizar un promedio ponderado de las utilidades de todas las generaciones.
- Suponga que el planificador social maximiza

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta_S^t U(t)$$

- β_S es el factor de descuento del planificador social, que refleja cómo valora las utilidades de diferentes generaciones.

- Sustituyendo $U(t) = u\left(c_1(t)\right) + \beta u\left(c_2(t+1)\right)$, esto implica:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta_S^t \left(u\left(c_1(t)\right) + \beta u\left(c_2(t+1)\right)\right)$$

sujeto a la restricción de recursos

$$F(K(t), L(t)) = K(t+1) + L(t)c_1(t) + L(t-1)c_2(t)$$

- Dividiendo esto por $L(t)$ y usando $L(t) = (1+n)^t L(0)$,

$$f(k(t)) = (1+n)k(t+1) + c_1(t) + \frac{c_2(t)}{1+n}$$

- El problema de maximización del planificador social implica entonces la siguiente condición necesaria de primer orden:

$$u'\left(c_1(t)\right) = \beta f'(k(t+1))u'\left(c_2(t+1)\right)$$

- Dado que $R(t+1) = f'(k(t+1))$, esto es idéntico a la ecuación de Euler.
- No es de extrañar: asignar el consumo de un individuo determinado exactamente de la misma manera que lo haría el propio individuo.
- Ausencia de "fallos de mercado" en la distribución temporal del consumo a precios dados.

Ineficiencia dinámica

- Sin embargo, siguen presentes cuestiones de dinámica y eficiencia.
- En particular, el equilibrio competitivo es subóptimo de Pareto cuando $k^* > k_{\text{gold}}$, ya que reducir el ahorro puede aumentar el consumo para cada generación, donde k_{gold} se define como

$$f'\left(k_{\text{gold}}\right) = 1 + n$$

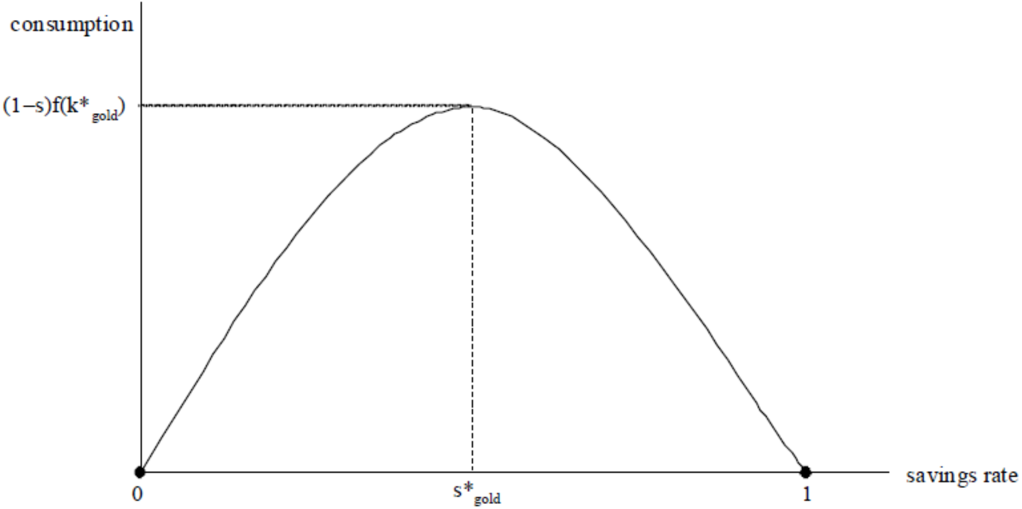
- en estado estacionario

$$\begin{aligned} f\left(k^*\right) - (1+n)k^* &= c_1^* + (1+n)^{-1} c_2^* \\ &\equiv c^* \end{aligned}$$

- La primera línea sigue la contabilidad del ingreso nacional y la segunda define c^*. Por lo tanto

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = f'\left(k^*\right) - (1+n) < 0 \text{iff } k^* > k_{\text{gold}}$$

Sobreacumulación: El nivel de la ”regla de oro” de la tasa de ahorro



- Ahora, si $k^* > k_{\text{gold}}$, entonces $\partial c^* / \partial k^* < 0$: reducir los ahorros puede aumentar el consumo (total) para todos.
- Más específicamente, considere la siguiente variación comenzando desde el estado estacionario en el momento T: cambie el capital social del siguiente período en $-\Delta k$, donde $\Delta k > 0$, y de ahí en adelante, inmediatamente pasamos a un nuevo estado estacionario (claramente factible) con los siguientes cambios de consumo:

$$\Delta c(T) = (1+n)\Delta k > 0$$
$$\Delta c(t) = -\left(f'\left(k^* - \Delta k\right) - (1+n)\right)\Delta k \quad \text{para todos } t > T$$

- La primera expresión refleja el aumento directo del consumo debido a la disminución en ahorros.
- Además, desde $k^* > k_{\text{gold}}$, para Δk, $f'\left(k^* - \Delta k\right) - (1+n) < 0$, entonces $\Delta c(t) > 0$ para todo $t \geq T$
- El aumento del consumo de cada generación puede distribuirse por igual durante los dos períodos de su vida, aumentando así necesariamente la utilidad de todas las generaciones.

- Si $k^* > k_{\text{gold}}$, nos referimos a la economía como dinámicamente ineficiente: hay sobreacumulación de capital.
- Otra forma de expresar la ineficiencia dinámica es que

$$r^* < n$$

- Recuerde que en la economía de Ramsey de horizonte infinito, la condición de transversalidad requería que $r > g + n$.
- La ineficiencia dinámica surge por la heterogeneidad inherente al modelo de generaciones traslapadas, que elimina la condición de transversalidad.

Óptimo y subóptimo de Pareto en el modelo OLG

Proposición

En la economía de generaciones traslapadas de referencia, el equilibrio competitivo no es necesariamente el óptimo de Pareto. Más específicamente, siempre que $r^* < n$ y la economía sea dinámicamente ineficiente, es posible reducir el stock de capital a partir del estado estable competitivo y aumentar el nivel de consumo de todas las generaciones.

- La ineficiencia de Pareto del equilibrio competitivo es la otra cara de la moneda de la ineficiencia dinámica.

Interpretación

Intuición para la ineficiencia dinámica:

- Las personas que viven en el tiempo t enfrentan precios determinados por el capital social con el que están trabajando.
- Externalidad pecuniaria de las acciones de generaciones anteriores que afectan el bienestar de la generación actual.
- Las externalidades pecuniarias suelen ser de segundo orden y no importan para el bienestar.
- Pero no cuando se ve afectada una corriente infinita de agentes recién nacidos que se incorporan a la economía.
- Es posible reorganizar de manera que se puedan aprovechar estas externalidades pecuniarias. - Intuición complementaria:

- La ineficiencia dinámica surge de la sobreacumulación.
- Los resultados de la generación joven actual necesitan ahorrar para la vejez.
- Sin embargo, cuanto más ahorran, menor es la tasa de retorno y pueden alentar a ahorrar aún más.
- El efecto sobre la tasa futura de rendimiento del capital es una externalidad pecuniaria en la próxima generación.
- Si se introdujeran formas alternativas de proporcionar consumo a las personas de edad avanzada, se podría mejorar la sobreacumulación.

5. Seguridad social

Papel de la seguridad social en la acumulación de capital

- Los sistemas de pensiones pueden verse como una forma de afrontar la sobreacumulación.
- Consideramos dos sistemas de pensiones:

Sistema de capitalización individual

Los jóvenes cotizan a la pensión y sus cotizaciones se les devuelven en la vejez.

Sistema de reparto

Las transferencias de los jóvenes van directamente al anciano actual.

- El sistema de reparto desalienta los ahorros agregados.
- Con ineficiencia dinámica, desalentar los ahorros puede conducir a una mejora de Pareto.

- El gobierno en la fecha t recauda una cantidad $d(t)$ de los jóvenes, invierte los fondos en capital social y paga a los trabajadores cuando viejos $R(t+1)d(t)$.
- Por lo tanto, el problema de maximización individual es,

$$\max_{c_1(t), c_2(t+1), s(t)} u\left(c_1(t)\right) + \beta u\left(c_2(t+1)\right)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} c_1(t) + s(t) &\leq w(t) - d(t) \\ c_2(t+1) &\leq R(t+1)(s(t) + d(t)), \end{aligned}$$

para una elección dada de $d(t)$ por parte del gobierno.

- Observe que ahora la cantidad total invertida en la acumulación de capital es $s(t) + d(t) = (1+n)k(t+1)$

- Ya no es el caso de que los individuos siempre elijan $s(t) > 0$.
- Siempre que $s(t)$ sea irrestricto, sea cual sea $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$, se aplica el equilibrio competitivo.
- Cuando se impone $s(t) \geq 0$ como restricción, se aplica el equilibrio competitivo si se da $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$, privadamente óptimo $\{s(t)\}_{t=0}^{\infty}$ es tal que $s(t) > 0$ para todos los t.

Proposición

Considere un sistema de pensiones de capitalización individual en el entorno descrito anteriormente en el que el gobierno recauda $d(t)$ de los jóvenes en la fecha t.

1. Suponga que $s(t) \geq 0$ para todo t. Si se da la secuencia factible $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ de pagos pensiones, la secuencia de ahorros que maximiza la utilidad $\{s(t)\}_{t=0}^{\infty}$ es tal que $s(t) > 0$ para todos los t, entonces el conjunto de equilibrios competitivos sin pensiones es el conjunto de equilibrios competitivos con pensiones.
2. Sin la restricción $s(t) \geq 0$, dada cualquier secuencia factible $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ de pagos de pensiones, el conjunto de los equilibrios sin pensiones es igual al conjunto de equilibrios competitivos con pensiones.

- Además, incluso cuando existe la restricción de que $s(t) \geq 0$, un programa de pensiones de capitalización individual no puede conducir a la mejora de Pareto.

Pnesiones de reparto

- El gobierno recolecta $d(t)$ de los jóvenes en el momento t y distribuye a los ancianos actuales con transferencia per cápita $b(t) = (1+n)d(t)$
- El problema de maximización individual se vuelve

$$\max_{c_1(t), c_2(t+1), s(t)} u\left(c_1(t)\right) + \beta u\left(c_2(t+1)\right)$$

sujeto a

$$c_1(t) + s(t) \leq w(t) - d(t) c_2(t+1) \qquad \leq R(t+1)s(t) + (1+n)d(t+1),$$

para una secuencia factible dada de niveles de pago del Seguro Social $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$

- La tasa de rendimiento de los pagos del seguro social es n en lugar de $r(t+1) = R(t+1) - 1$, porque el sistema de pensiones de reparto es un sistema de transferencia puro.

- Solo $s(t)$ —en lugar de $s(t)$ más $d(t)$ como en el esquema financiado —entra en la acumulación de capital.
- Es posible que $s(t)$ cambie para compensar, pero este cambio de compensación no suele ocurrir.
- Por lo tanto, las pensiones de reparto reducen la acumulación de capital.
- Desalentar la acumulación de capital puede tener consecuencias negativas para el crecimiento y el bienestar.
- De hecho, la evidencia empírica sugiere que hay muchas sociedades en las que el nivel de acumulación de capital **es subóptimamente bajo**.
- Pero en este caso, reducir el ahorro agregado puede ser bueno cuando la economía muestra una ineficiencia dinámica.

Proposición

Considere la economía de generaciones traslapadas descrita anteriormente y suponga que el equilibrio competitivo descentralizado es dinámicamente ineficiente. Entonces existe una secuencia factible de pagos de pensiones de reparto $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ que conducirá a un equilibrio competitivo a partir de cualquier fecha t en la que Pareto domine al equilibrio competitivo sin pensiones.

- Similar a la forma en que se descentralizó la asignación óptima de Pareto en la economía de ejemplo anterior.
- El sistema de pensiones está transfiriendo recursos de las generaciones futuras a la generación anterior inicial.
- Pero sin una ineficiencia dinámica, cualquier transferencia de recursos (y cualquier programa de pensiones de reparto) empeoraría la situación de alguna generación futura.

6. Conclusiones

Conclusiones

- Los modelos de generaciones traslapadas son más realistas que los modelos de agentes representativos con horizonte infinito.
- Los modelos con generaciones traslapadas quedan fuera del alcance del Primer Teorema del Bienestar: estaban motivados en parte por la posibilidad de asignaciones subóptimas de Pareto.
- Los equilibrios pueden ser "dinámicamente ineficientes" y presentar sobreacumulación: el sistema de pensiones de reparto puede mejorar el problema.
- Trayectoria decreciente de la renta laboral importante para la sobreacumulación, y lo que importa no son los horizontes finitos sino la llegada de nuevos individuos.
- Sobreacumulación y subóptimaidad de Pareto: externalidades pecuniarias creadas en individuos que aún no están en el mercado.
- No sobredimensionar la ineficiencia dinámica: la principal cuestión del crecimiento económico es por qué tantos países tienen tan poco capital.

Referencias I

Acemoglu, Daron (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press.