El modelo de crecimiento neoclásico

Randall Romero Aguilar, PhD

randall.romero@ucr.ac.cr

EC3300 - Crecimiento Económico

II Semestre 2021

Última actualización: 21 de octubre de 2021

Tabla de contenidos

El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

- Ramsey (1928), seguido muchos años después por Cass (1965) y Koopmans (1965), formuló el modelo canónico de crecimiento óptimo para una economía con progreso tecnológico "aumenta-trabajo".
- En el modelo de Solow, los agentes de la economía (y el planificador) siguen una regla lineal simplista para el consumo y la inversión. En el modelo de Ramsey, los agentes (y el planificador) eligen el consumo y la inversión de manera óptima para maximizar su utilidad (bienestar).
- En la siguiente sección, comenzamos el análisis del modelo de crecimiento neoclásico considerando el plan óptimo de un planificador social benevolente, que elige la asignación estática e intertemporal de recursos en la economía para maximizar el bienestar social.
- Más adelante mostraremos que las asignaciones que prevalecen en un entorno de mercado competitivo descentralizado coinciden con las asignaciones dictadas por el planificador social.

1. Un problema de crecimiento óptimo centralizado: El problema del planificador

La función de producción y el crecimiento del trabajo

- La economía tiene un sector productivo perfectamente competitivo que usa una función de producción agregada Cobb-Douglas
$$Y = \mathrm{F}(K, L) = K^{\alpha}(ZL)^{1-\alpha}$$
para producir el producto usando capital y trabajo.
- Las horas de trabajo (igual que la población) aumenta a una tasa constante
$$\frac{\dot{L}}{L} = \xi$$
- La productividad del trabajo crece a una tasa
$$\frac{\dot{Z}}{Z} = \phi$$
- Por lo tanto, el progreso tecnológico permite a cada trabajador producir perpetuamente más con la misma cantidad de capital conforme pasa el tiempo.
- La cantidad ZL es conocida como el número de "unidades de eficiencia" del trabajo.

Acumulación del capital

- El capital agregado se acumula de acuerdo con

$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$

- Denotamos por letras minúsculas a las variable en mayúscula divididas por unidades de eficiencia.
- Tenemos que

$$y = \frac{Y}{ZL} = \frac{K^{\alpha}(ZL)^{1-\alpha}}{ZL} = \left(\frac{K}{ZL}\right)^{\alpha} = k^{\alpha}$$

- La evolución del capital podemos escribirla como

$$
\begin{aligned}
\dot{k} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\right) &= \left(\frac{\dot{K}ZL - K(\dot{Z}L + Z\dot{L})}{(ZL)^2}\right) \\
&= \frac{\dot{K}}{ZL} - k\left(\frac{\dot{Z}}{Z} + \frac{\dot{L}}{L}\right) \\
&= \frac{Y - C - \delta K}{ZL} - (\phi + \xi)k \\
&= y - c - \delta k - (\phi + \xi)k \\
&= f(k) - c - (\phi + \xi + \delta)k
\end{aligned}
$$

La regla de oro

- De la ecuación
$$\dot{k^*} = f(k^*) - c^* - (\phi + \xi + \delta)k^* = 0$$
parece razonable argumentar que el mejor estado estacionario factible es aquel que maximiza c^*.
- Esta el la condición de optimalidad llamada regla de oro de Phelps (1961).

- La meta del planificador social es maximizar la suma descontada de la utilidad CRRA del consumo per cápita:

$$\max \int_0^\infty \left(\frac{(C/L)^{1-\theta}}{1-\theta}\right) e^{-\rho t} \, \mathrm{d}t$$

- Note que $\frac{C}{L} = Z\frac{C}{ZL} = Zc$.
- Como la productividad crece a una tasa constante, entonces $Z_t = Z_0 e^{\phi t}$.
- Entonces podemos escribir la función objetivo como

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{(Zc)^{1-\theta}}{1-\theta}\right) e^{-\rho t} \, \mathrm{d}t &= Z_0^{1-\theta} \int_0^\infty \left(\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}\right) e^{-\rho t} e^{(1-\theta)\phi t} \, \mathrm{d}t \\ &= Z_0^{1-\theta} \int_0^\infty u(c) e^{[(1-\theta)\phi - \rho]t} \, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

- Definimos $\nu = \rho - (1-\theta)\phi$ y normalizamos $Z_0 = 1$ para obtener

$$\max \int_0^\infty u(c) e^{-\nu t} \, \mathrm{d}t$$

El problema del planificador social

El problema del planificador social

$$V(k) = \max_{c} \int_0^\infty u(c)e^{-\nu t}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{sujeto a } \dot{k} = f(k) - c - (\phi + \xi + \delta)k$$

- La variable de estado es k.
- La variable de control es c.
- La tasa de descuento intertemporal es ν.

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

- La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es

$$\nu V(k) = \max_c \left\{ u(c) + V'(k)\underbrace{[f(k) - c - (\phi + \xi + \delta)k]}_{\dot{k}} \right\}$$

- La condición de primer orden es

$$u'(c) = V'(k) \qquad (\partial./\partial t) \Rightarrow \qquad u''(c)\dot{c} = V''(k)\dot{k}$$

- La condición de la envolvente es

$$\nu V'(k) = V'(k)\underbrace{[f'(k) - (\phi + \xi + \delta)]}_{\tilde{r}} + V''(k)\dot{k}$$

$$V''(k)\dot{k} = -V'(k)[\tilde{r} - \nu]$$

- Si sustituimos la condición de primer orden en la de la envolvente

$$
\begin{aligned}
u''(c)\dot{c} &= -u'(c)[\tilde{r} - \nu] \\
\dot{c} &= \tfrac{1}{\theta}[\tilde{r} - \nu]c
\end{aligned}
$$

  donde hemos evaluado la función utilidad como CRRA.

- Esta ecuación se conoce como la regla de oro modificada, o bien como la regla de Keynes-Ramsey.

Regla de Keynes-Ramsey

$$
\dot{c} = \tfrac{1}{\theta}[f'(k) - (\xi + \delta + \rho + \theta\phi)]c
$$

El estado estacionario

- A partir de la Regla de Keynes-Ramsey encontramos el capital de estado estacionario

$$
\begin{aligned}
f'(k) &= \xi + \delta + \rho + \theta\phi \\
\alpha k^{\alpha-1} &= \xi + \delta + \rho + \theta\phi \\
k^* &= \left(\frac{\alpha}{\xi + \delta + \rho + \theta\phi}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

- Sabiendo k^* usamos la ecuación de movimiento del capital $\dot{k} = f(k) - c - (\phi + \xi + \delta)k = 0$ para encontrar el consumo estacionario

$$
c^* = f(k^*) - (\phi + \xi + \delta)k^*
$$

La condición de transversalidad

- En este modelo la restricción presupuestaria intertemporal toma la forma de una condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} V'(t)e^{(\phi+\xi)t-\int_0^t \tilde{r}_\tau d\tau} k_t \; \mathrm{d}t = 0$$

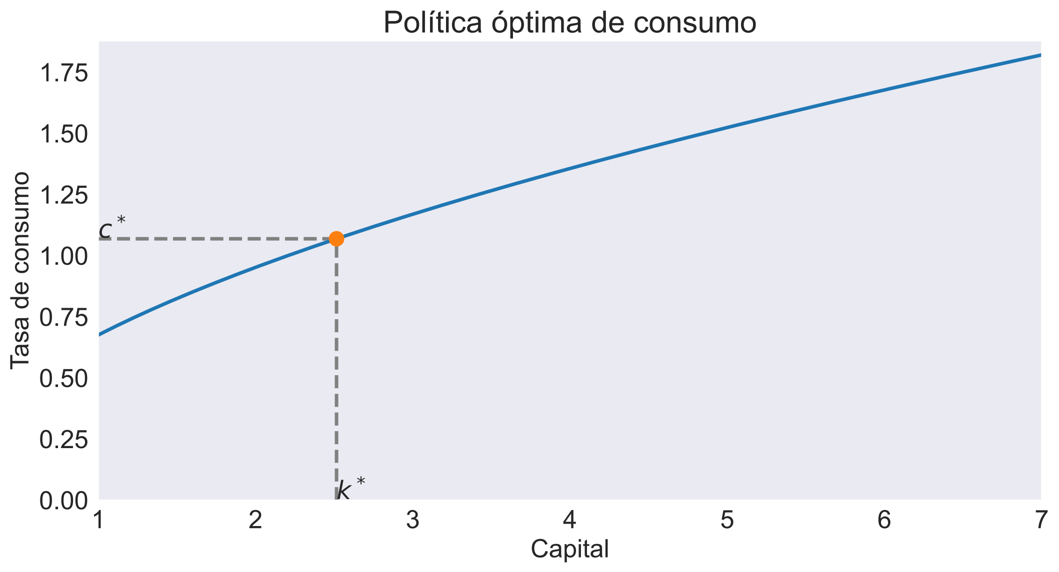
- El modelo tiene solo una senda estacionaria. El propósito de la condición de transversalidad es fijar el consumo inicial $\hat{c}(0)$ (dado el capital inicial $k(0)$) en el único valor que es estable a largo plazo.
- Si el consumo inicial es mayor a $\hat{c}(0)$, el capital eventualmente sería negativo.
- Si el consumo inicial es menor a $\hat{c}(0)$, el capital crecerá infinitamente.

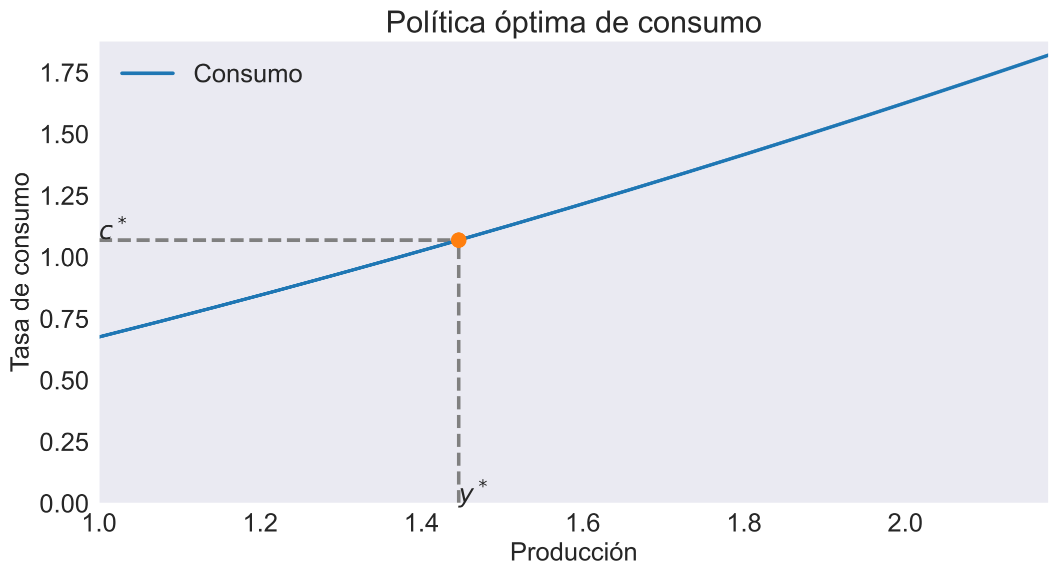
Ejemplo 1:

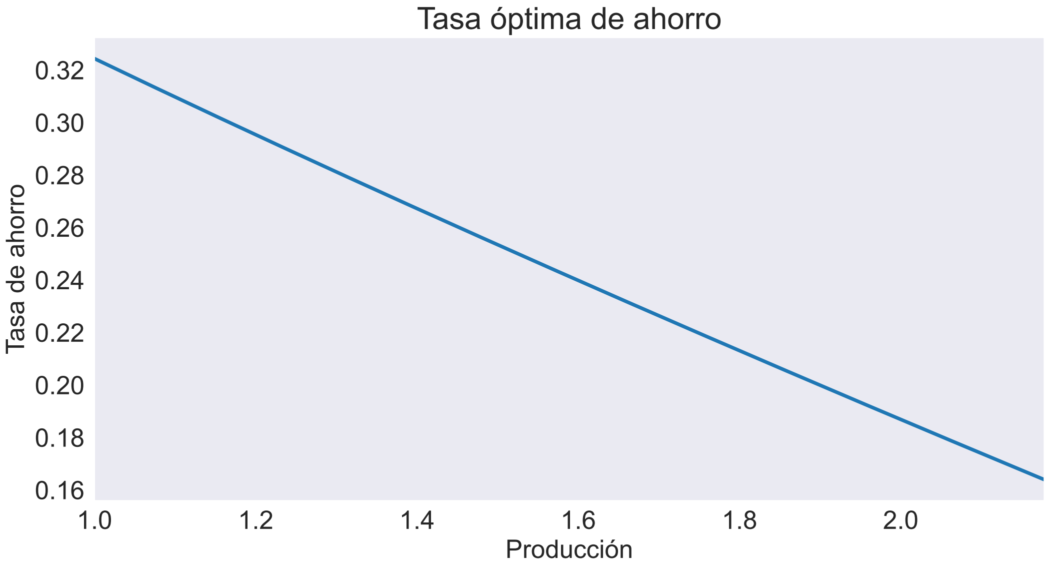
Solución numérica del modelo

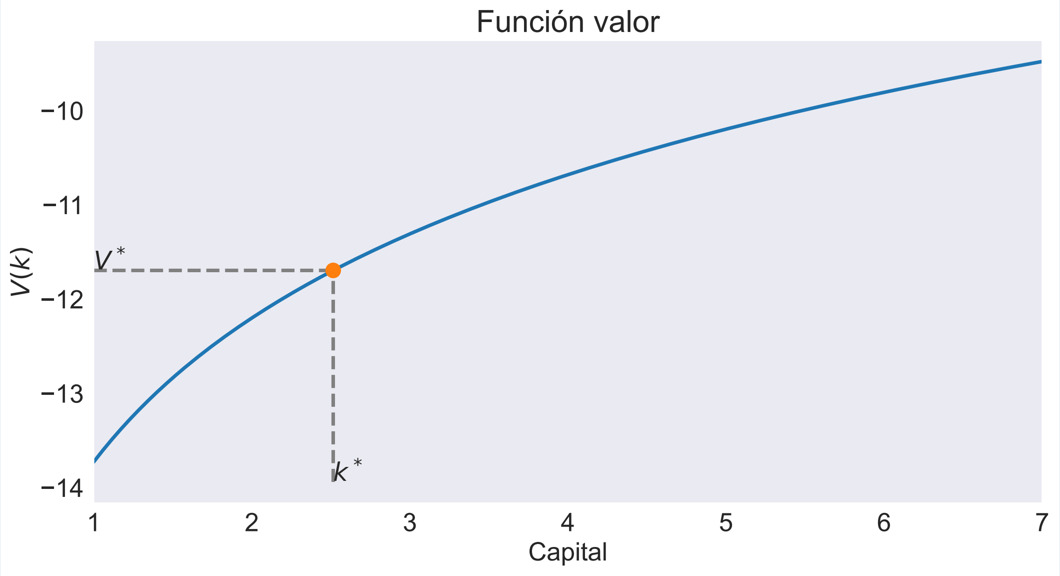
- En el cuaderno de Jupyter Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans.ipynb se presenta la solución numérica del modelo, haciendo uso del paquete *CompEcon* para Python.
- La solución se obtuvo fijando los parámetros:

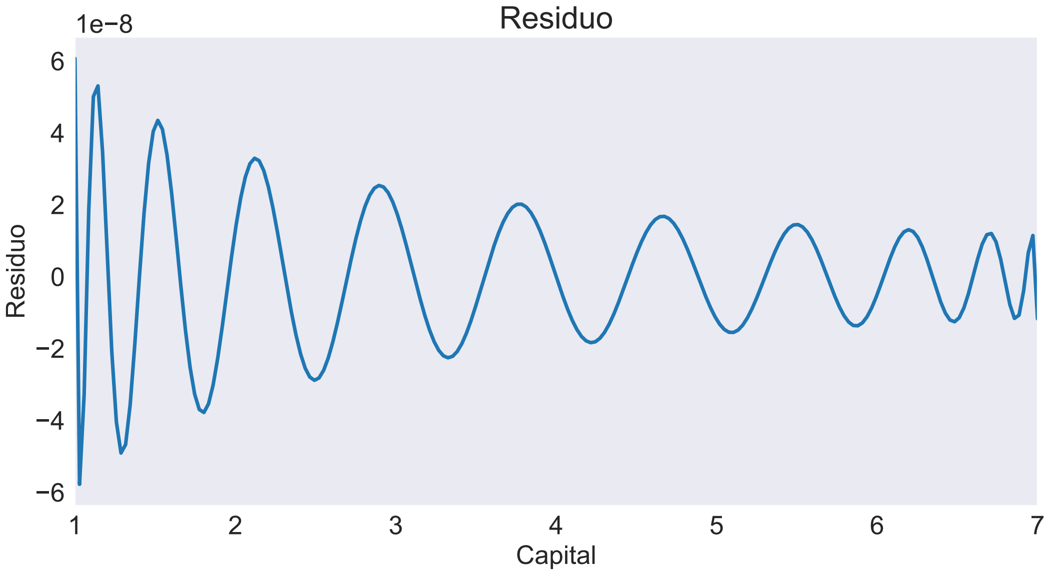
Parámetro	Descripción	Valor
α	participación del capital	0.40
δ	tasa de depreciación del capital	0.10
θ	aversión relativa al riesgo	2.00
ρ	tasa continua de descuento	0.05
ϕ	tasa de crecimiento de la productividad del trabajo	0.03
ξ	tasa de crecimiento de la población	0.02

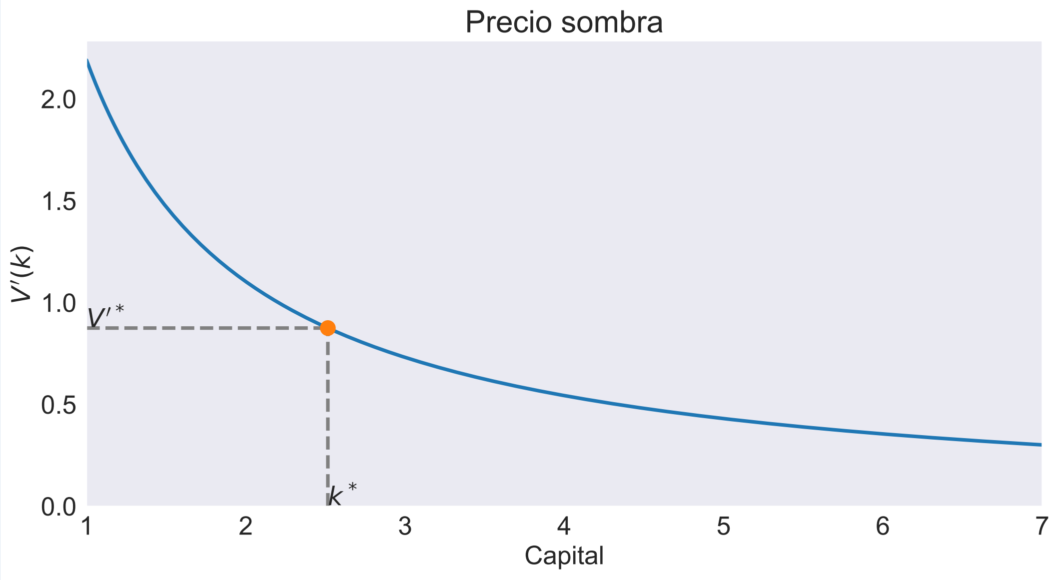

Política óptima de consumo
Tasa de consumo
Capital
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
1
2
3
4
5
6
7
c^*
k^*


Política óptima de consumo
Consumo
Tasa de consumo
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
c^*
y^*
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
Producción

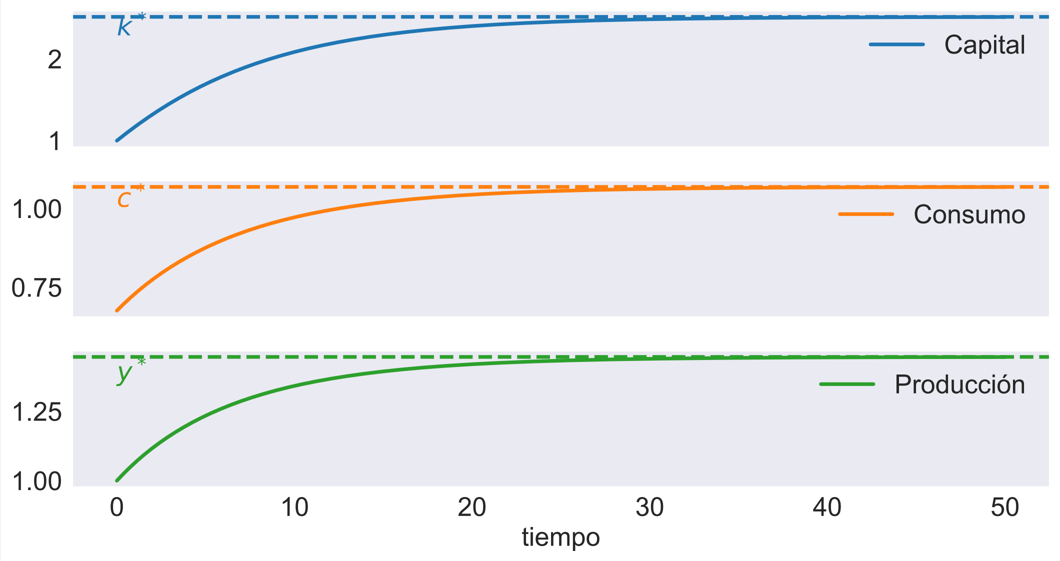

Tasa óptima de ahorro
Tasa de ahorro
0.32
0.30
0.28
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
0.16
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
Producción


Función valor
−10
−11
−12
−13
−14
$V(k)$
V^*
k^*
1
2
3
4
5
6
7
Capital


Residuo
1e−8
6
4
2
0
−2
−4
−6
Residuo
1
2
3
4
5
6
7
Capital



Precio sombra
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
$V'(k)$
V'^*
k^*
1
2
3
4
5
6
7
Capital



k^*
2
1
Capital
c^*
1.00
0.75
Consumo
y^*
1.25
1.00
Producción
0
10
20
30
40
50
tiempo

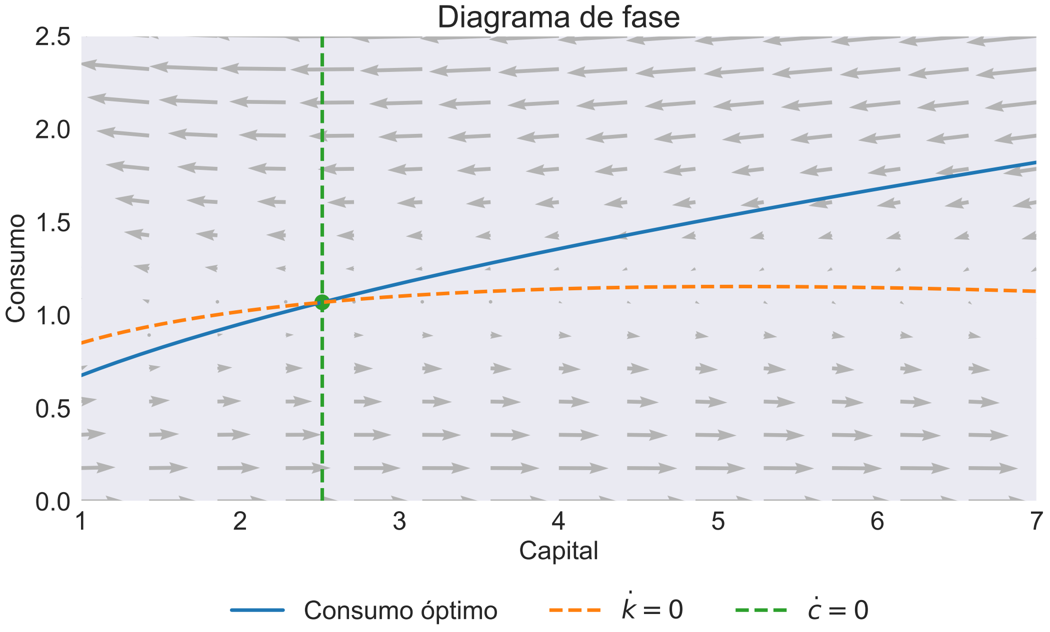
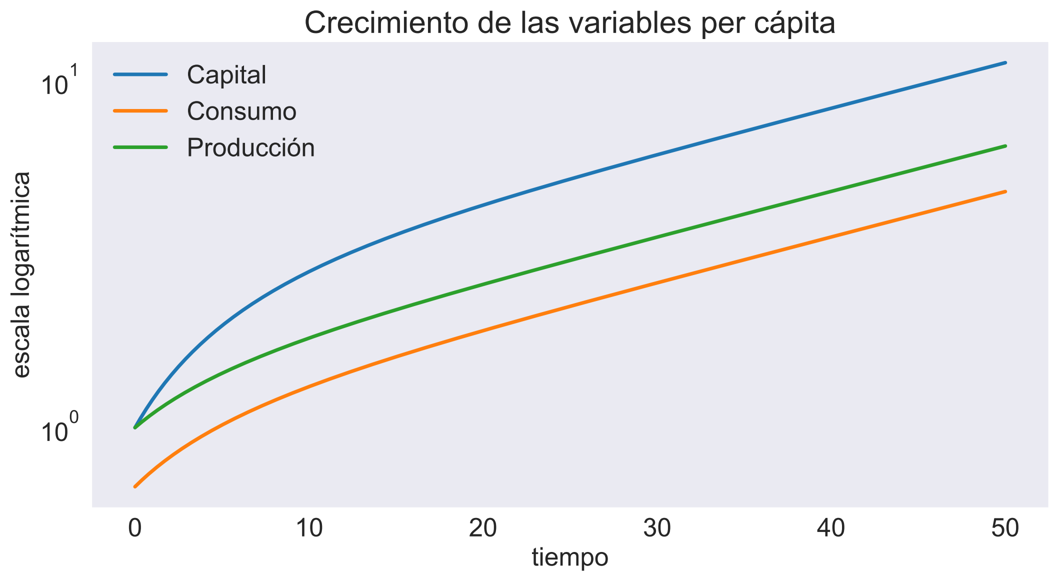
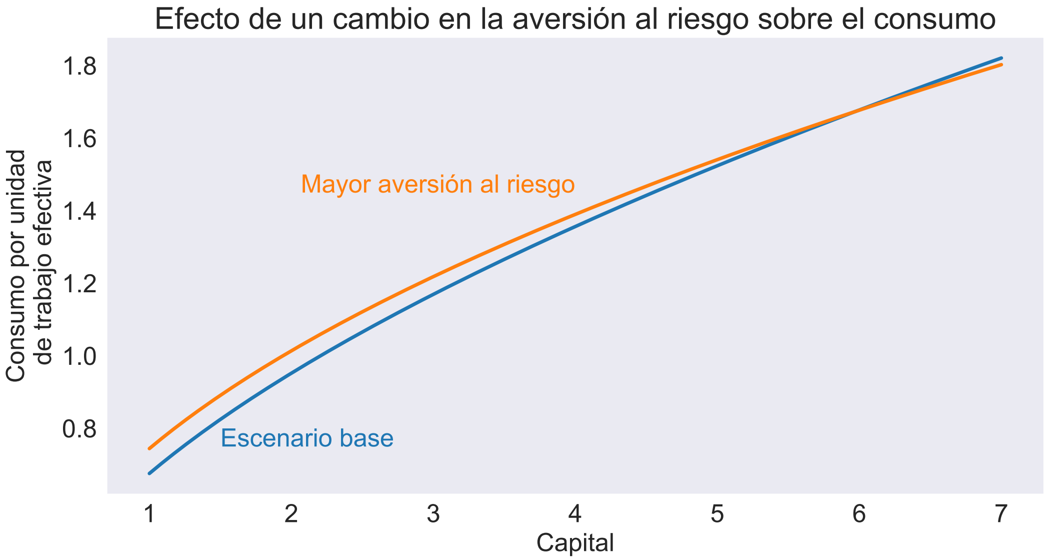


Diagrama de fase
Consumo
Capital
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
1
2
3
4
5
6
7
Consumo óptimo
$\dot{k} = 0$
$\dot{c} = 0$

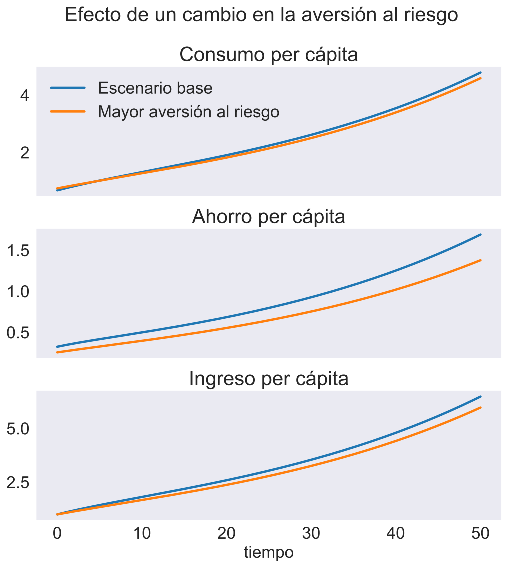

Crecimiento de las variables per cápita
Capital
Consumo
Producción
escala logarítmica
10^1
10^0
0
10
20
30
40
50
tiempo

- Una vez resuelto el modelo, podemos analizar el efecto dinámico de cambiar uno de sus parámetros.
- Por ejemplo, si aumentamos el parámetro de aversión relativa al riesgo de 2.0 a 3.0, el estado estacionario será:

	Escenario base	Mayor aversión al riesgo	% cambio
Capital	2.52	2.05	-18.48
Consumo	1.07	1.03	-4.10
Función valor	-11.69	-4.33	-63.01
Precio sombra	0.88	0.93	6.06
Producción	1.45	1.33	-7.85


Efecto de un cambio en la aversión al riesgo sobre el consumo
Consumo por unidad
de trabajo efectiva
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
Mayor aversión al riesgo
Escenario base
1
2
3
4
5
6
7
Capital

- En su intento por suavizar más su consumo, el consumidor ahorra menos que en el escenario base.
- Esto provoca que el capital se acumule más lentamente, a su vez causando que el ingreso per cápita crezca más lentamente.
- En el largo plazo, el ahorro es permanentemente inferior, por lo que la producción per cápita crece más lentamente y eventualmente el consumo es **menor** que en el escenario base.



2. Un modelo de crecimiento óptimo descentralizado: El equilibrio competitivo

El modelo descentralizado

- En la sección anterior estudiamos un modelo de planificador central: un dictador benevolente que controla el proceso productivo con la finalidad de maximizar el bienestar del consumidor.
- En esta sección, en cambio, asumimos la existencia del mercado.
  - El consumidor representativo es dueño de los factores, los cuales alquila a la empresa representativa.
  - La empresa produce un bien final, que vende al consumidor, a partir de los insumos que le alquila.
  - En el equilibrio competitivo, las cantidades de factores ofrecidas por el consumidor coincide con las demandadas por la empresa, mientras que la cantidad producida del bien final coincide con la cantidad demandada por el consumidor.
  - El consumidor utiliza el bien final para consumirlo o bien para acumularlo (inversión).

El problema de la empresa

- La empresa tiene acceso a una tecnología $Y = \mathrm{F}(K, ZL) = K^{\alpha}(ZL)^{1-\alpha}$.
- Desea maximizar sus ganancias

$$\begin{aligned}\Pi &= \mathrm{F}(K, ZL) - rK - wL \\ &= ZLf\left(\tfrac{K}{ZL}\right) - rK - wL\end{aligned}$$

  donde $r(t)$ es la tasa de alquiler del capital y $w(t)$ la tasa salarial.
- El problema de la empresa es estático, por lo que maximiza su utilidad a cada instante

Las condiciones de optimalidad son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial K} &= ZLf'(k)\tfrac{1}{ZL} - r \\ &= f'(k) - r = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial L} &= Z\left[f(k) - Lf'(k)\tfrac{K}{ZL^2}\right] - w \\ &= Z\left[f(k) - kf'(k)\right] - w = 0\end{aligned}$$

Como es usual en casos donde la empresa tiene rendimientos constantes de escala, las ganancias de la empresa son nulas

$$\begin{aligned}
\Pi &= ZLf\left(k\right) - rK - wL \\
&= ZLf\left(k\right) - f'(k)K - Z\left[f(k) - kf'(k)\right]L \\
&= ZLf\left(k\right) - f'(k)K - ZLf(k) - ZLkf'(k) \\
&= ZLf\left(k\right) - f'(k)K - ZLf(k) - Kf'(k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

El problema del consumidor

- Similar al caso del problema del planificador social, el consumidor desea maximizar la suma descontada de la utilidad CRRA del consumo per cápita:

$$\max \int_0^\infty \left(\frac{(C/L)^{1-\theta}}{1-\theta}\right) e^{-\rho t}\, \mathrm{d}t$$

- De nuevo, tenemos que

$$\max \int_0^\infty u(c) e^{-\nu t}\, \mathrm{d}t$$

Acumulación del capital

- El capital agregado se acumula ahora de acuerdo con

$$\dot{K} = \underbrace{rK + wL}_{\text{ingresos}} + \underbrace{\Pi}_{=0} - C - \delta K$$

- La evolución del capital podemos escribirla como

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= \frac{\dot{K}}{ZL} - (\phi + \xi)k \\
&= \frac{rK + wL - C - \delta K}{ZL} - (\phi + \xi)k \\
&= rk + \tfrac{w}{Z} - c - \delta k - (\phi + \xi)k \\
&= rk + \tfrac{w}{Z} - (\phi + \xi + \delta)k - c
\end{aligned}$$

El problema del consumidor

$$V(k) = \max_c \int_0^\infty u(c)e^{-\nu t}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{sujeto a } \dot{k} = rk + \tfrac{w}{Z} - (\phi + \xi + \delta)k - c$$

- La variable de estado es k.
- La variable de control es c.
- La tasa de descuento intertemporal es ν.

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

- La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es

$$\nu V(k) = \max_{c} \left\{ u(c) + V'(k) \underbrace{\left[rk + \tfrac{w}{Z} - (\phi + \xi + \delta)k - c\right]}_{\dot{k}} \right\}$$

- La condición de primer orden es

$$u'(c) = V'(k) \qquad\qquad (\partial./\partial t) \Rightarrow \qquad\qquad u''(c)\dot{c} = V''(k)\dot{k}$$

- La condición de la envolvente es

$$\begin{aligned} \nu V'(k) &= V'(k)[r - (\phi + \xi + \delta)] + V''(k)\dot{k} \\ V''(k)\dot{k} &= -V'(k)[r - (\phi + \xi + \delta + \nu)] \end{aligned}$$

- Si sustituimos la condición de primer orden en la de la envolvente

$$
\begin{aligned}
u''(c)\dot{c} &= -u'(c)[r - (\phi + \xi + \delta + \nu)] \\
\dot{c} &= \tfrac{1}{\theta}[r - (\phi + \xi + \delta + \nu)]c \\
&= \tfrac{1}{\theta}[r - (\xi + \delta + \rho + \theta\phi)]c
\end{aligned}
$$

donde hemos evaluado la función utilidad como CRRA.

El equilibrio competitivo

- En el equilibrio competitivo, las cantidades ofrecidas por el consumidor deben ser iguales a las demandadas por la empresa.
- Si sustituimos los precios de los factores (r, w) de las demandas de insumos en la ecuación de acumulación de capital y en la condición de optimalidad encontramos

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= rk + \tfrac{w}{Z} - (\phi + \xi + \delta)k - c \\
&= f'(k)k + \tfrac{Z[f(k) - kf'(k)]}{Z} - (\phi + \xi + \delta)k - c \\
&= f(k) - (\phi + \xi + \delta)k - c \\
\dot{c} &= \tfrac{1}{\theta}[r - (\xi + \delta + \rho + \theta\phi)]c \\
&= \tfrac{1}{\theta}[f'(k) - (\xi + \delta + \rho + \theta\phi)]c
\end{aligned}$$

- Este sistema de ecuaciones diferenciales es idéntico al que obtuvimos en el problema del planificador central.
- Por lo tanto, en ambos casos la asignación de recursos es idéntica.

3. Un modelo de crecimiento óptimo con incertidumbre: antesala de modelos DSGE

Un modelo de crecimiento óptimo con incertidumbre

- En esta sección consideramos de nuevo un modelo de crecimiento óptimo de planificador central.
- Ahora asumimos que la población es constante $L(t) = 0 \quad \forall t$.
- A diferencia del modelo anterior, en esta ocasión la productividad *total* de los factores $A(t)$ crece a una tasa estocástica, siguiendo un proceso de Itô:

$$\mathrm{d}A = \gamma(1 - A)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{A}\,\mathrm{d}z$$

  donde $\mathrm{d}z$ es un proceso de Wiener.
- El capital se acumula según $\dot{k} = Af(k) - c - \delta k$, o bien:

$$\mathrm{d}k = (Af(k) - c - \delta k)\,\mathrm{d}t$$

El problema del planificador social

El problema del planificador social

$$V(k, A) = \max_{c} \int_{0}^{\infty} u(c) e^{-\rho t} \, \mathrm{d}t$$

sujeto a

$$\mathrm{d}k = (Af(k) - c - \delta k) \, \mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}A = \gamma(1 - A) \, \mathrm{d}t + \sigma\sqrt{A} \, \mathrm{d}z$$

- Ahora tenemos dos variables de estado k y A.
- La variable de control es c.
- La tasa de descuento intertemporal es ρ.

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

- La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es

$$\rho V(k, A) = \max_{c} \left\{ u(c) + [Af(k) - c - \delta k]V_k + \gamma(1 - A)V_A + \tfrac{1}{2}A\sigma^2 V_{AA} \right\}$$

- La condición de primer orden es

$$u'(c) = V_k(k, A)$$

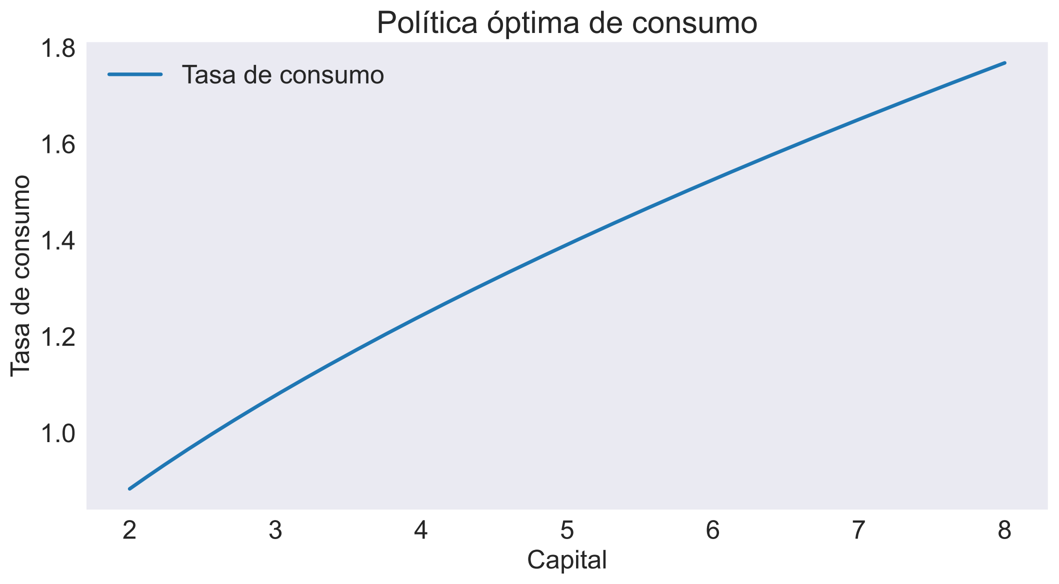
- Es sencillo obtener las condiciones de la envolvente.
- No obstante, no es sencillo resolver analíticamente las ecuaciones resultantes.
- Por ello, este tipo de modelos requieren de métodos numéricos para ser resueltos.

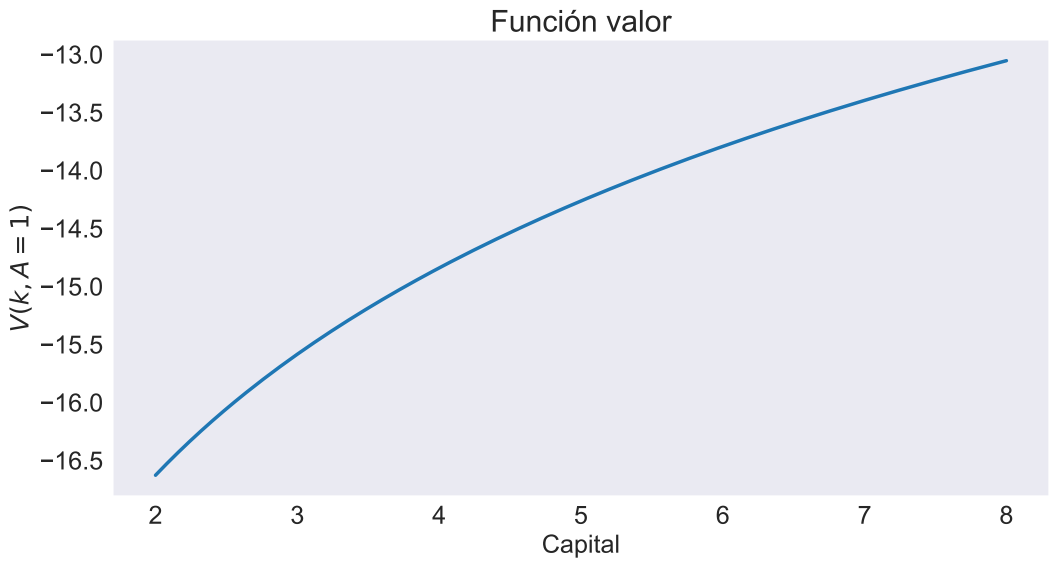
Ejemplo 2:

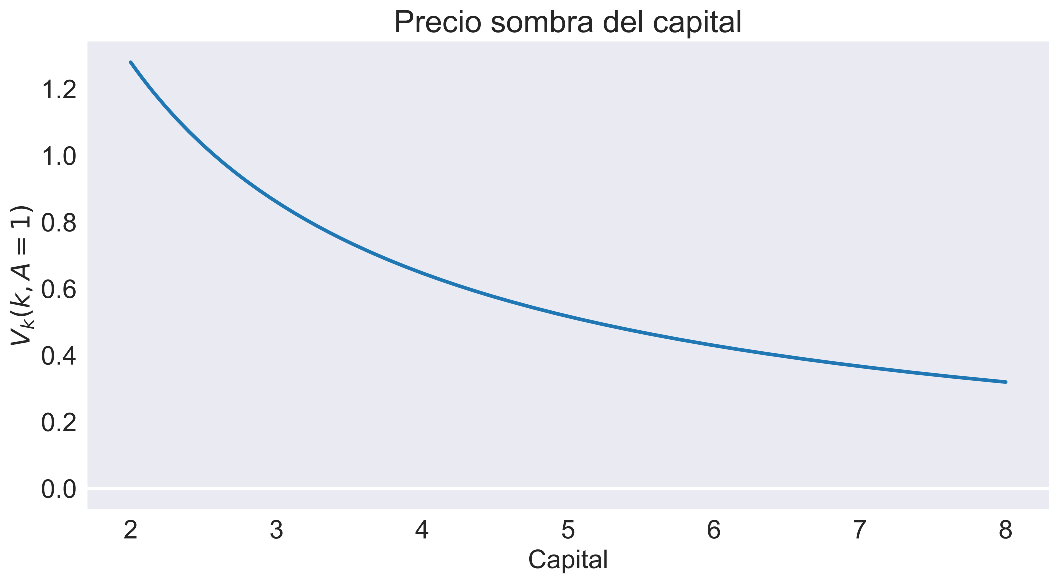
Solución numérica del modelo de crecimiento estocástico

- En el cuaderno de Jupyter Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans.ipynb se presenta la solución numérica del modelo, haciendo uso del paquete *CompEcon* para Python.
- La solución se obtuvo fijando los parámetros:

Parámetro	Descripción	Valor
α	productividad marginal del capital	0.50
δ	tasa de depreciación del capital	0.10
θ	aversión relativa al riesgo	2.00
ρ	tasa continua de descuento	0.05
γ	coeficiente de reversión a la media de la productividad	0.50
σ	volatilidad de la productividad	0.05


Política óptima de consumo
Tasa de consumo
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
Tasa de consumo
2
3
4
5
6
7
8
Capital


Función valor
−13.0
−13.5
−14.0
−14.5
−15.0
−15.5
−16.0
−16.5
$V(k, A = 1)$
2
3
4
5
6
7
8
Capital


Precio sombra del capital
$V_k(k, A = 1)$
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
2
3
4
5
6
7
8
Capital

Ejemplo 3:

Resolviendo un modelo de crecimiento con incertidumbre usando Stata

- Es posible resolver modelos *discretos* de equilibrio general utilizando la versión 16 o 17 de Stata.
- Aunque en este capítulo todos los modelos analizados son de tiempo *continuo*, en este ejemplo se presenta un modelo de tiempo discreto.
- El objetivo es ilustrar cómo resolverlo en Stata; los métodos numéricos que subyacen en la solución encontrada por Stata van más allá de los objetivos de este curso.
- Estos apuntes resumen el contenido de la entrada **dsge** del manual de Stata.

- Se propone el siguiente modelo, en el cual para simplificar asumimos que $L(t) = 0 \quad \forall t$.

$$
\begin{aligned}
1 &= \beta\, \mathbb{E}_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-1} (1 + R_{t+1} - \delta) \right\} && \text{(ecuación de Euler)} \\
Y_t &= Z_t K_t^{\alpha} && \text{(función de producción)} \\
R_t &= \alpha Z_t K_t^{\alpha-1} && \text{(demanda por capital)} \\
K_{t+1} &= Y_t - C_t + (1-\delta) K_t && \text{(acumulación de capital)} \\
\ln(Z_{t+1}) &= \rho \ln(Z_t) + e_{t+1} && \text{(evolución de la productividad)}
\end{aligned}
$$

Especificamos el modelo en Stata

```
* Descargar los datos
use https://www.stata-press.com/data/r17/usmacro2, clear

* Especificar los parámetros del modelo
matrix parametros = (0.33, 0.96, 0.025, 0.9, 1)
matrix colnames parametros = alpha beta delta rho /sd(e.z)

* Especificar el modelo
dsgenl (1 = {beta}*(F.c/c)^(-1)*(1+F.r - {delta})) ///
      (r={alpha}*z*k^({alpha}-1)) (y=z*k^{alpha}) ///
      (F.k=y-c+(1-{delta})*k) ///
      (ln(F.z) = {rho}*ln(z)), ///
      observed(y) unobserved(c r) exostate(z) endostate(k) from(
          param_mat) solve noidencheck
```

```
* Calcular el estado estacionario
estat steady, compact
```

```
Location of model steady-state

--------------------------
             | Coefficient
-------------+------------
           k |       10.88
           z |        1.00
           c |        1.93
           r |        0.07
           y |        2.20
--------------------------
```

```
* Calcular las funciones de política
estat policy, compact
```

```
Policy matrix

-----------------------------------
             |        k          z
-------------+---------------------
           c |  .6077069   .3431366
           r |      -.67          1
           y |       .33          1
-----------------------------------
```

$$\frac{C_t - C^*}{C^*} \approx 0.61\frac{K_t - K^*}{K^*} + 0.34\frac{Z_t - Z^*}{Z^*}$$

$$\frac{R_t - R^*}{R^*} \approx -0.67\frac{K_t - K^*}{K^*} + \frac{Z_t - Z^*}{Z^*}$$

$$\frac{Y_t - Y^*}{Y^*} \approx 0.33\frac{K_t - K^*}{K^*} + \frac{Z_t - Z^*}{Z^*}$$

```
* Calcular las funciones de transición
estat transition, compact
```

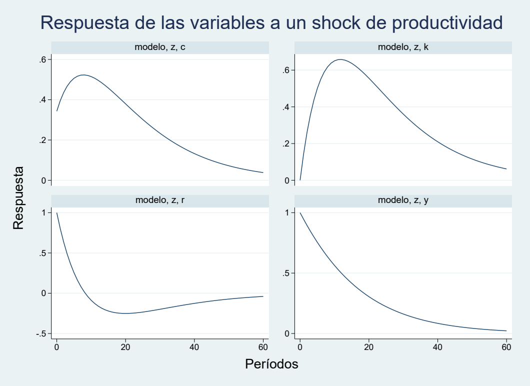
```
Transition matrix of state variables

-----------------------------------
             |        k           z
-------------+---------------------
k            |
         F1. |  .9340903   .1412781
             |
z            |
         F1. |         0         .9
-----------------------------------
```

$$\log K_{t+1} \approx 0.93 \log K_t + 0.14 \log Z_t$$

$$\log Z_{t+1} \approx 0.90 \log Z_t$$

```
* Calcular las funciones de impulso-respuesta
irf set crecimiento.irf, replace
irf create modelo, step(60)
irf graph irf, impulse(z) response(c r y k)
```



- La función de impulso-respuesta muestra la respuesta dinámica de una variable endógena del modelo a una perturbación transitoria en una variable exógena.
- Ante un shock temporal de productividad, tanto el consumo como el capital y la producción crecen por encima de su estado estacionario.
- El precio de alquiler del capital sube inicialmente, aunque posteriormente cae por debajo de su valor estacionario.

Referencias I

Cass, David (1965). "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation". En: *Review of Economic Studies* 32, págs. 233-240.

Koopmans, Tjalling C. (1965). "On the concept of optimal economic growth". En: *(Study Week on the) Econometric Approach to Development Planning*. Ed. por J. Johansen. North-Holland Publishing Co. Cap. 4, págs. 225-287.

Miranda, Mario J. y Paul L. Fackler (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT Press. ISBN: 0-262-13420-9.

Phelps, Edmund S. (1961). "The Golden Rule of Accumulation". En: *American Economic Review*, págs. 638-642.

Ramsey, Frank (1928). "A Mathematical Theory of Saving". En: *Economic Journal* 38.152, págs. 543-559.

Stata (2021). *Dynamic Stochastic General Equilibrim Models Reference Manual, release 17*. Stata Press. ISBN: 978-1-59718-327-7.