Optimización en tiempo continuo

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC3300 - Crecimiento Económico

II Semestre 2021

Última actualización: 8 de octubre de 2021

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. El problema de control óptimo determinístico

El problema de control óptimo determinístico

En el problema de control óptimo determinístico de horizonte infinito, un agente busca maximizar el valor presente de un flujo de recompensas $f(s(t), x(t))$ que en cada instante de tiempo t dependen del estado de un proceso económico $s(t)$ y el control que ejerce el agente $x(t)$, dado que el estado evoluciona según

$$\dot{s}(t) = g(s(t), x(t))$$

a partir del estado inicial $s(0)$.

Más explícitamente, el agente busca resolver

$$\max_{x} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} f(s(t), x(t))\ \mathrm{d}t$$

sujeto a $x : [0, \infty] \mapsto X$es continuo por partes

$$\dot{s}(t) = g(s(t), x(t))$$

$s(0)$ dado

- Llamamos
  - $s \in S$ la variable de estado y $S \subset \Re^n$ el espacio de estado.
  - $x \in X$ la variable de control y $X \subset \Re^m$ el espacio de control.
  - $f : S \times X \mapsto \Re$ la función de recompensa.
  - $g : S \times X \mapsto \Re^m$ la función de transición.
  - $\rho > 0$ la tasa de descuento.
- Asumimos
  - S y X son no-vacíos, cerrados y conectados.
  - f y g son dos veces diferenciables de forma continua.

Intuitivamente, el problema de control óptimo de tiempo continuo es el caso límite del problema de optimización dinámica de tiempo discreto en el que:

- el tiempo entre períodos se vuelve infinitesimalmente pequeño;
- la suma de las recompensas obtenidas en puntos discretos en el tiempo se reemplaza por la integral de un flujo continuo de recompensas;
- la ecuación de transición de estado de tiempo discreto se reemplaza por una ecuación diferencial ordinaria controlada.

- Para simplificar la exposición, limitamos la presentación a estados y controles univariados, a menos que se advierta lo contrario.
- Sin embargo, con sencillos ajustes a la notación, la presentación se generaliza a estados y controles multivariados.

Programación dinámica

- Hay varios enfoques para resolver problemas de control óptimo determinístico en tiempo continuo, que incluyen
  - Cálculo de variaciones (1700s: Newton, Bernoulli, Bernoulli, Euler, Lagrange)
  - El principio del máximo (1956: Pontryagin)
  - Programación dinámica (1957: Bellman)
- Cada enfoque se desarrolló de forma independiente y tiene sus proponentes.

Sin embargo, nos apoyaremos en la programación dinámica porque tiene claras ventajas sobre los otros dos métodos, incluyendo que:

- se generaliza fácilmente a modelos estocásticos, mientras que los otros métodos son aplicables estrictamente a modelos determinísticos;
- maneja fácilmente las restricciones de la variable de control;
- caracteriza la solución óptima de forma más transparente;
- genera los resultados clave de los otros dos métodos.

- En programación dinámica, derivamos la política óptima, que prescribe el control que debe ejercerse en cada momento, dado el estado predominante, para maximizar el valor presente de las recompensas a partir de ese momento.
- En *Programación Dinámica*, 1957, Richard Bellman escribe:

  > *En lugar de determinar la secuencia óptima de decisiones a partir del estado fijo del sistema, deseamos determinar la decisión óptima a tomar en cualquier estado del sistema. Sólo si conocemos esto último, comprendemos la estructura intrínseca de la solución.*

- La política óptima surge naturalmente de la solución de una ecuación funcional conocida como ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

La función de valor

- Sea $V(s)$ el valor presente máximo alcanzable de las recompensas desde el momento t en adelante, comenzando desde un estado dado s.
- Llamamos $V(s) : S \mapsto \Re$ el tiempo t función valor.
- La función valor se desconoce a priori y debe derivarse del modelo subyacente.

Ecuación de Bellman: pasando de tiempo discreto a tiempo continuo

- Recordemos que la ecuación de Bellman en tiempo discreto nos dice

$$V(s(t)) = \max_{x\in X}\left\{f(s(t), x(t)) \times 1 + \beta^1 V(s(t+1))\right\}.$$

- por lo que, intuitivamente, la función de valor $V(t)$, a un primer orden, satisface

$$V(s) = \max_{x\in X}\left\{f(s,x)\,\mathrm{d}t + e^{-\rho\,\mathrm{d}t}V(s+\,\mathrm{d}s)\right\}.$$

  donde $s + ds \equiv s(t+1)$ y $\beta \equiv e^{-\rho}$.
- Multiplicamos ambos lados por $e^{\rho\,\mathrm{d}t}$

$$e^{\rho\,\mathrm{d}t}V(s) = \max_{x\in X}\left\{e^{\rho\,\mathrm{d}t}f(s,x)\,\mathrm{d}t + V(s+\,\mathrm{d}s)\right\}.$$

- Restamos $V(s)$ de ambos lados

$$\left(e^{\rho\,\mathrm{d}t} - 1\right)V(s) = \max_{x\in X}\left\{e^{\rho\,\mathrm{d}t}f(s,x)\,\mathrm{d}t + V(s+\,\mathrm{d}s) - V(s)\right\}.$$

- Dividimos ambos lados por $\mathrm{d}t$

$$\frac{e^{\rho\,\mathrm{d}t}-1}{\mathrm{d}t}V(s) = \max_{x\in X}\left\{e^{\rho\,\mathrm{d}t}f(s,x) + \frac{V(s+\mathrm{d}s)-V(s)}{\mathrm{d}t}\right\}.$$

- Tomamos el límite $\mathrm{d}t \to 0$

$$\begin{aligned}
\rho V(s) &= \max_{x\in X}\left\{f(s,x) + \frac{\mathrm{d}V(s)}{\mathrm{d}t}\right\} \\
&= \max_{x\in X}\left\{f(s,x) + V'(s)\dot{s}\right\} \\
&= \max_{x\in X}\left\{f(s,x) + V'(s)g(s,x)\right\}.
\end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de Bellman en tiempo continuo.

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

- La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, o ecuación HJB para abreviar, afirma que para todo $s \in S$:

$$\rho V(s) = \max_{x \in X} \left\{ f(s,x) + V'(s) g(s,x) \right\}.$$

- Aquí, x maximiza el valor presente de las recompensas desde el momento t en adelante, comenzando desde un estado dado s, asumiendo que el agente se comporta de manera óptima en el futuro.

- La ecuación de Bellman admite una interpretación de arbitraje.
- $V(s)$ es el valor del activo.
- En cualquier momento, el propietario del activo puede:
  - vender el activo y obtener un rendimiento $\rho V(s)$; o
  - mantener el activo, obteniendo un dividendo $f(s, x)$ y una ganancia de capital $\frac{\mathrm{d}V(s)}{\mathrm{d}t}$.

$$\underbrace{\rho V(s)}_{\text{rendimiento}} = \max_{x \in X} \left\{ \underbrace{f(s, x)}_{\text{dividendo}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}V(s)}{\mathrm{d}t}}_{\text{ganancia de capital}} \right\}.$$

- La ecuación de Bellman establece que los valores deben ser iguales, de lo contrario existiría una oportunidad de ganancia de arbitraje.

Ecuación multivariante de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Suponga que el estado y/o el control son multivariados, es decir, suponga

$$S \subset \Re^n, \qquad X \subset \Re^m, \qquad f : S \times X \mapsto \Re, \qquad g : S \times X \mapsto \Re^n.$$

- La equation HJB afirma que para todo $s \in S$:

$$\rho V(s) = \max_{x \in X} \left\{ f(s,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(s)}{\partial s_i} g_i(s,x) \right\}.$$

El principio del máximo

- Las condiciones necesarias de primer orden de la ecuación HJB son reveladoras.
- Denotamos por $\lambda(t) \equiv V'(s(t))$ a la derivada de la función valor con respecto a la variable de estado en el momento t.
- Representa el valor marginal o precio sombra que un agente dinámicamente optimizador le imputa al estado s en el momento t.
- Por razones históricas, $\lambda(t)$ también es conocido como la variable de co-estado.

El principio del máximo

Teorema Principio del máximo de Pontryagin

Afirma que $x(t)$, para $t \geq 0$, es una senda de control óptimo solo si hay una función real diferenciable $\lambda(t)$, tal que para todo $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \underset{x\in X}{\operatorname{argmax}}\left\{f(s(t),x) + \lambda(t)g(s(t),x)\right\} \\
\dot{\lambda}(t) &= \left(\rho - \frac{\partial g(s(t),x(t))}{\partial s}\right)\lambda(t) - \frac{\partial f(s(t),x(t))}{\partial s} \\
\dot{s}(t) &= g(s(t),x(t))
\end{aligned}
$$

- El Principio es llamado así por el matemático ruso que lo derivó antes de que Bellman introdujera su Principio de Optimalidad.

Obteniendo el principio del máximo a partir de la ecuación HJB

- Para facilitar la notación, prescindiremos de la dependencia en t.
- Sustituyendo $V'(s)$ con λ en la ecuación de Bellman implica trivialmente que a lo largo de una senda óptima

$$x \text{ resuelve } \max_{x \in X} \left\{ f(s,x) + \lambda g(s,x) \right\}.$$

- Aplicando el teorema de la envolvente a la ecuación HJB

$$\rho\lambda = \frac{\partial f(s,x)}{\partial s} + \lambda \frac{\partial g(s,x)}{\partial s} + V''(s)g(s,x).$$

- Ahora bien

$$\dot{\lambda} = V''(s)g(s,x)$$

se sigue, después de algunas sustituciones y reordenamientos, que

$$\dot{\lambda} = \left(\rho - \frac{\partial g(s,x)}{\partial s} \right) \lambda - \frac{\partial f(s,x)}{\partial s}.$$

Estado estacionario

- El modelo puede poseer un estado estacionario bien definido al que el proceso económico optimizado converge con el tiempo:

$$
\begin{aligned}
s^* &\equiv \lim s(t) \\
x^* &\equiv \lim x(t) \\
\lambda^* &\equiv \lim \lambda(t).
\end{aligned}
$$

- En estado estacionario, el estado s^*, control x^* y co-estado λ^*, si existen, deben satisfacer el Principio del Máximo, de modo que:

$$
\begin{aligned}
&x^* \text{ resuelve } \max_{x \in X} \{f(s^*, x) + \lambda^* g(s^*, x)\} \\
&0 = \left(\rho - \frac{\partial g(s^*, x^*)}{\partial s}\right) \lambda^* - \frac{\partial f(s^*, x^*)}{\partial s} \\
&0 = g(s^*, x^*)
\end{aligned}
$$

- Si x no tiene restricciones, entonces las condiciones anteriores pueden escribirse como un sistema de ecuaciones no lineales:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f(s^*, x^*)}{\partial x} + \lambda^* \frac{\partial g(s^*, x^*)}{\partial x} \\
0 &= \left(\rho - \frac{\partial g(s^*, x^*)}{\partial s}\right) \lambda^* - \frac{\partial f(s^*, x^*)}{\partial s} \\
0 &= g(s^*, x^*)
\end{aligned}
$$

- Este sistema puede resolver numéricamente y, a menudo, analíticamente, sin tener que resolver la ecuación de Bellman por completo.
- Conocer el estado estacionario ayuda para entender la tendencia de largo plazo del proceso económico optimizado.

El Hamiltoniano

- En la literatura económica, el principio del máximo de Pontryagin se expresa a menudo con referencia al Hamiltoniano

$$H(s, x, \lambda) \equiv f(s, x) + \lambda g(s, x).$$

- El Hamiltoniano es una función real de
  - la variable de estado s,
  - la variable de control x, y
  - la variable de co-estado λ.

- En términos del Hamiltoniano, el principio del máximo de Pontryagin afirma que $x : [0, \infty] \mapsto \Re$ es una senda de control óptimo sólo si hay una función $\lambda : [0, \infty] \mapsto \Re$ tal que para todo $t \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \text{ resuelve } \max_{x \in X} \quad H(s, x, \lambda) && \text{(condición de optimalidad)} \\
\dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H(s, x, \lambda)}{\partial s} + \rho\lambda && \text{(ecuación de co-estado)} \\
\dot{s}(t) &= \frac{\partial H(s, x, \lambda)}{\partial \lambda} && \text{(ecuación de movimiento)}
\end{aligned}
$$

sujeto a una condición de transversalidad adicional.

- El Hamiltoniano es un análogo de tiempo continuo del lagrangiano encontrado en problemas de optimización de dimensión finita con restricciones de igualdad.
- El Hamiltoniano es simplemente un truco mnemotécnico para expresar de manera compacta el principio del máximo de Pontryagin.
- Aunque se cita frecuentemente en la literatura, no lo encuentro particularmente útil.

2. Procesos estocásticos de tiempo continuo

Proceso de Wiener

Un proceso de Wiener es un proceso estocástico de tiempo continuo con valor real $z(t)$ con las siguientes propiedades:

- la senda temporal seguida por $z(t)$ es continua
- el incremento $\mathrm{d}z(t)$ en $z(t)$ durante un intervalo de tiempo infinitesimal $\mathrm{d}t$ se distribuye normalmente con media cero y varianza $\mathrm{d}t$, es decir,

$$\mathrm{d}z(t) \sim N(0,\, \mathrm{d}t)$$

- Los incrementos de $z(t)$ sobre intervalos de tiempo no superpuestos son independientes

Proceso Itô

- Un proceso Itô $s(t)$ es un proceso estocástico de tiempo continuo de valor real con diferencial estocástico

$$\mathrm{d}s = \underbrace{\mu(s,t)}_{\text{deriva}}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\sigma(s,t)}_{\text{volatilidad}}\,\mathrm{d}z$$

  donde z es un proceso de Wiener.
- Llamamos $\mu : \Re^2 \mapsto \Re$ la deriva del proceso.
- Llamamos $\sigma : \Re^2 \mapsto \Re^+$ la volatilidad del proceso.
- Los procesos de Itô son el bloque de construcción básico de los modelos modernos de tiempo continuo en finanzas y economía.

El diferencial estocástico es simplemente una convención utilizada para indicar que $s(t)$ es un proceso estocástico de tiempo continuo que satisface las siguientes propiedades:

- la senda temporal seguida por $s(t)$ es continua
- el incremento $\mathrm{d}s(t)$ en $s(t)$ durante un intervalo de tiempo infinitesimal $\mathrm{d}t$ se distribuye normalmente con media $\mu(s(t), t)\ \mathrm{d}t$ y varianza $\sigma^2(s(t), t)\ \mathrm{d}t$, es decir,

$$ds(t) \sim N\left(\mu(s(t), t)\ \mathrm{d}t, \sigma^2(s(t), t)\ \mathrm{d}t\right)$$

- Los incrementos en $s(t)$ sobre intervalos de tiempo no superpuestos son independientes.

Procesos Itô simples

- Un proceso browniano absoluto es un proceso Itô $s(t)$ con deriva $\mu(s,t) = \mu$ y volatilidad $\sigma(s,t) = \sigma \geq 0$ constantes:

$$\mathrm{d}s(t) = \mu \ \mathrm{d}t + \sigma \ \mathrm{d}z$$

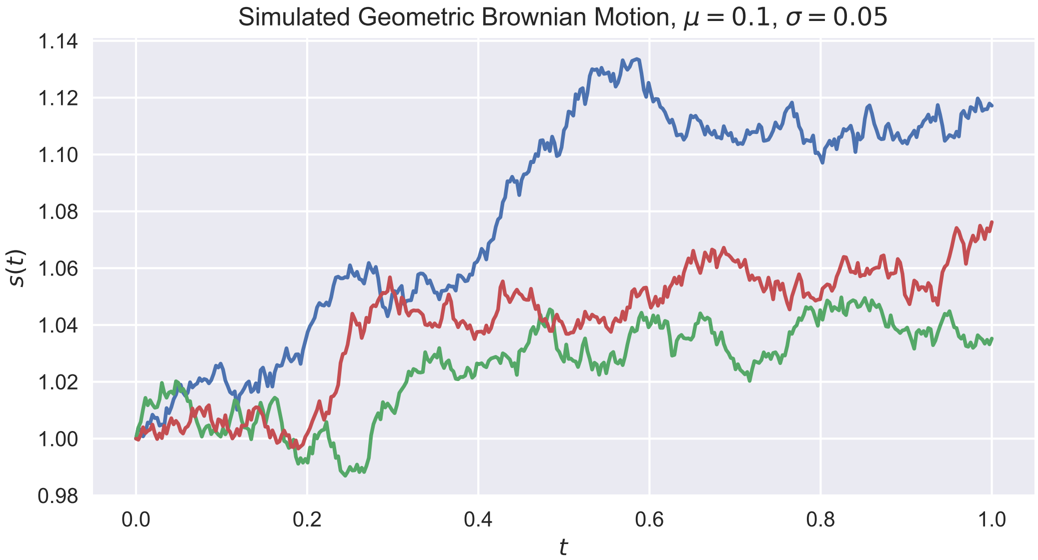
- Un proceso browniano geométrico es un proceso Itô $s(t)$ cuya deriva $\mu(s,t) = \mu s$ y volatilidad $\sigma(s,t) = \sigma s$ son proporcionales a $s(t)$:

$$\mathrm{d}s(t) = \mu s(t)\ \mathrm{d}t + \sigma s(t)\ \mathrm{d}z$$

o equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{s(t)} = \mu\ \mathrm{d}t + \sigma\ \mathrm{d}z$$

- Los procesos brownianos geométricos se utilizan ampliamente para modelar los precios de las materias primas y los activos.



Simulated Geometric Brownian Motion, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.05$
1.14
1.12
1.10
1.08
1.06
1.04
1.02
1.00
0.98
$s(t)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

Cálculo Itô

- Trabajar con procesos Itô se simplifica considerablemente si se aplican las reglas básicas del producto del cálculo Itô

$\times$	$\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}z$
$\mathrm{d}t$	0	0
$\mathrm{d}z$	0	$\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}t^2 &= 0 \\ \mathrm{d}t\;\mathrm{d}z &= 0 \\ \mathrm{d}z^2 &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

- Las reglas son razonables, dado que

$$\mathrm{d}t^2 << \mathrm{d}t, \qquad \mathbb{E}\;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}z = 0, \qquad E\;\mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}t.$$

- Las derivaciones, sin embargo, están más allá del alcance del curso.

Teorema Lema de Itô

Suponga que $y(t) = f(s(t), t)$ donde f es dos veces continuamente diferenciable en $\Re^2$ y $s(t)$ es un proceso Itô con diferencial estocástico

$$\mathrm{d}s = \mu(s,t)\ \mathrm{d}t + \sigma(s,t)\ \mathrm{d}z.$$

Entonces $y(t)$ también es un proceso Itô con diferencial estocástico

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(s,t)\frac{\partial f}{\partial s} + \tfrac{1}{2}\sigma(s,t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma(s,t)\frac{\partial f}{\partial s}\ \mathrm{d}z$$

donde las derivadas parciales de f son evaluadas en $(s(t), t)$.

- Una prueba informal del Lema de Itô parte de la expansión de Taylor del diferencial estocástico $\mathrm{d}y$ en (s,t):

$$\mathrm{d}y = f_t\ \mathrm{d}t + f_s\ \ \mathrm{d}s + \tfrac{1}{2} f_{tt}\ \mathrm{d}t^2 + f_{st}\ \ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t + \tfrac{1}{2} f_{ss}\ \ \mathrm{d}s^2 + \text{términos de orden superior.}$$

- Se sigue del cálculo Itô que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t^2 &= 0 \\
\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t &= \mu(s,t)\ \mathrm{d}t^2 + \sigma(s,t)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}t = 0 \\
\mathrm{d}s^2 &= \mu^2(s,t)\ \mathrm{d}t^2 + 2\mu(s,t)\sigma(s,t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}z + \sigma(s,t)^2\ \mathrm{d}z^2 = \sigma(s,t)^2\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- Sustituyendo estos términos y $\mathrm{d}s$ en la expansión de Taylor se obtiene el lema de Itô.

Una fórmula más sencilla del lema de Itô

- Suponga que s sigue un proceso Itô y que la transformación depende solo de s (pero no de t directamente), $y = f(s)$.
- En la expansión de Taylor anterior tendríamos $f_t = f_{tt} = f_{st} = 0$.
- En este caso, podemos escribir el lema de Itô como

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(s)\,\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2} f''(s)(\mathrm{d}s)^2}$$

EJEMPLO

- Sea $y(t) = \log(s(t))$ donde $s(t)$ es un proceso browniano geométrico con deriva μs y volatilidad σs:
$$\mathrm{d}s = \mu s \ \mathrm{d}t + \sigma s \ dz.$$
- Sabemos que
$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \tfrac{1}{s}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \tfrac{-1}{s^2},$$
- El lema de Itô implica que $y(t)$ es un proceso de Itô con diferencial estocástico
$$\mathrm{d}y = \left(\mu - \tfrac{\sigma^2}{2}\right) \mathrm{d}t + \sigma \ \mathrm{d}z.$$
- Es decir, el logaritmo de un proceso browniano geométrico con deriva μs y volatilidad σs es un proceso browniano absoluto con deriva $\mu - \sigma^2/2$ y volatilidad σ.

3. El problema del control óptimo estocástico

En el problema de optimización dinámica estocástica, un agente busca maximizar el valor presente esperado de un flujo de recompensas $f(s(t), x(t))$ que en cada instante de tiempo t dependen del estado de un proceso económico $s(t)$ y el control que ejerce el agente $x(t)$, partiendo del estado inicial $s(0)$, dado que el estado evoluciona como un proceso Itô controlado

$$\mathrm{d}s = g(s, x)\ \mathrm{d}t + \sigma(s)\ dz$$

a partir del estado inicial $s(0)$.

Más explícitamente, el agente busca resolver

$$\begin{aligned} & \max_x \mathbb{E} \int_0^\infty e^{-\rho t} f(s(t), x(t)) \; \mathrm{d}t \\ \text{s.t.} \qquad & x(t) \in X \\ & \mathrm{d}s = \mu(s, x) \; \mathrm{d}t + \sigma(s, x) \; \mathrm{d}z \\ & s(0) \text{ dado.} \end{aligned}$$

- Llamamos
  - $s \in S$ la variable de estado y $S \subset \Re^n$ el espacio de estado.
  - $x \in X$ la variable de control y $X \subset \Re^m$ el espacio de control.
  - $f : S \times X \mapsto \Re$ the función de recompensa.
  - $\mu : S \times X \mapsto \Re^n$ la función de deriva de estado.
  - $\sigma : S \mapsto \Re^{n \times n}$ the función de difusión de estado.
  - $\rho > 0$ the tasa de descuento.
- Asumimos
  - S y X son no-vacíos, cerrados y conectados.
  - f y g son dos veces continuamente diferenciables.

Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Sea $V(s)$ el máximo valor presente esperado de las recompensas futuras alcanzable, comenzando desde un estado dado s.
- La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, o ecuación HJB para abreviar, afirma que para todo $s \in S$:

$$\rho V(s) = \max_{x \in X} \left\{ f(s,x) + V'(s)\mu(s,x) + \tfrac{1}{2} V"(s)\sigma^2(s,x) \right\}.$$

- Aquí, $x = x(s)$ es el control que debe ejecutarse para maximizar el valor presente esperado de las recompensas futuras.
- Llamamos $V(t) : S \mapsto \Re$ el tiempo t función de valor.

Prueba heurística

- Intuitivamente, la función de valor V, a un primer orden, satisface

$$V(s) = \max_{x\in X}\left\{f(s,x)\,\mathrm{d}t + e^{-\rho\,\mathrm{d}t}\,\mathbb{E}\,V(s+\mathrm{d}s)\right\}.$$

- Multiplicando ambos lados por $\frac{e^{\rho\,\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t}$ produce

$$\frac{e^{\rho\,\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t}V(s) = \max_{x\in X}\left\{e^{\rho\,\mathrm{d}t}f(s,x) + \mathbb{E}\left[\frac{V(s+\mathrm{d}s)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}.$$

- Restando $\frac{V(s)}{\mathrm{d}t}$ de ambos lados se obtiene

$$\left(\frac{e^{\rho\,\mathrm{d}t}-1}{\mathrm{d}t}\right)V(s) = \max_{x\in X}\left\{e^{\rho\,\mathrm{d}t}f(s,x) + \mathbb{E}\left[\frac{V(s+\mathrm{d}s)-V(s)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}.$$

- Tomando el límite $\mathrm{d}t \to 0$ encontramos

$$\rho V(s) = \max_{x \in X} \left\{ f(s,x) + \mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}V(s)}{\mathrm{d}t}\right] \right\}.$$

- Por el lema de Itô,

$$\mathrm{d}V(s) = \left[V'(s)\mu(s,x) + \tfrac{1}{2}V"(s)\sigma^2(s,x)\right]\,\mathrm{d}t + \sigma(s,x)V'(s)\,\mathrm{d}z.$$

- Tomando expectativas y "dividiendo" por $\mathrm{d}t$

$$\mathbb{E}\left[\frac{dV(s)}{\mathrm{d}t}\right] = V'(s)\mu(s,x) + \tfrac{1}{2}V"(s)\sigma^2(s,x).$$

- Sustituyendo en la ecuación anterior produce la ecuación HJB.
- Tenga en cuenta que la ecuación HJB no es estocástica; la aleatoriedad se elimina mediante el Lema de Itô.

4. Una aplicación: Consumo intertemporal en tiempo continuo

Un problema de consumo intertemporal

- Un consumidor con horizonte infinito.
- Utilidad instantánea $u(c)$, depende de su *tasa* de consumo.
- Descuenta la utilidad del consumo futuro a una tasa ρ.
- La utilidad descontada disfrutada a lo largo de su vida es

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t))\ \mathrm{d}t.$$

- Ahorra con un activo a, el cual devenga intereses a una tasa r constante.
- Tiene un ingreso salarial constante w.
- El saldo de su activo cambia según:

$$\dot{a}(t) = ra(t) + w - c(t).$$

- El problema del consumidor es entonces

$$V(a) = \max_{c,a} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c)\ \mathrm{d}t \qquad \text{sujeto a} \qquad \dot{a} = ra + w - c.$$

- La ecuación HJB correspondiente es:

$$\rho V(a) = \max_c \left\{ u(c) + V'(a)\underbrace{(ra + w - c)}_{\dot{a}} \right\}$$

- La condición de primer orden es

$$u'(c) = V'(a)$$

- que, derivándola con respecto al tiempo, da por resultado

$$u''(c)\dot{c} = V''(a)\dot{a}$$

- Por su parte, la condición de la envolvente es

$$\rho V'(a) = V''(a)\dot{a} + V'(a)r \qquad \Rightarrow \qquad (\rho - r)V'(a) = V''(a)\dot{a}$$

Sustituimos la CPO y su derivada para obtener:

$$\frac{u''(c)}{u'(c)}\,\dot{c} = \rho - r$$

- A partir de $\dot{c} = \frac{(\rho - r)u'(c)}{u''(c)}$ vemos que el consumo tiene un valor estacionario solo si
  - $r = \rho$,
  - la función de utilidad tiene un máximo, es decir $u'(c) = 0$.

- Si asumimos que la utilidad es isoelástica

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\eta}-1}{1-\eta} & \eta > 0, \eta \neq 1 \\ \log c & \eta = 1 \end{cases}$$

- tenemos que

$$\frac{u''(c)}{u'(c)} = \frac{-\eta}{c}$$

- Por lo que el consumo debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\dot{c} = \tfrac{r-\rho}{\eta} c$$

- Entonces

$$c(t) = e^{\frac{r-\rho}{\eta} t} c(0)$$

5. Otra aplicación: La teoría q de inversión

PENDIENTE

Referencias I

Acemoglu, Daron (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press.

Miranda, Mario J. y Paul L. Fackler (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT Press. ISBN: 0-262-13420-9.